Cuadernos de trabajo (1995) 1-62

Guía de problemas
Examen general de conocimientos

Ricardo Cantoral Uriza
Francisco Cordero Osorio
Rosa María Farfán Márquez
Asuman Oktaç

PRESENTACIÓN

Este documento ha sido concebido como un auxiliar para la preparación del examen general de conocimientos matemáticos del programa de maestría en ciencias del Área de Educación Superior. Este tiene como finalidad principal establecer criterios que garanticen el manejo versátil del saber matemático propio del nivel superior de educación, requisito indispensable para la investigación en nuestra disciplina: la matemática educativa.

El examen general de conocimiento puede presentarse desde el ingreso al programa de maestría o bien al término del primer año de estudios. Sólo en casos excepcionales habrá una prórroga de un semestre.

Por otro lado, esta guía proporciona a los candidatos y estudiantes de recién ingreso, una orientación de lo que ellos habrán de saber en lo que concierne a la profundidad y manejo matemático del contenido.

Los temas que aquí se presentan están relacionados con las líneas y proyectos de investigación que actualmente se desarrollan en el Área. En consecuencia, esta Guía de problemas evoluciona con dichos proyectos.

SECCIÓN I

Anexamos un cuestionario para estudiantes en cuya resolución han sido autorizados para usar su calculadora (no gráfica).

Primero
Analiza el texto como un problema, estudiando:

- el lugar y el papel de los contextos en juego (geométrico, algebraico, numérico) y las herramientas que usarán los alumnos en cada uno de estos contextos
- la organización del problema, el encadenamiento y la forma de las preguntas
- las ayudas y los medios de control dados a los alumnos.

Segundo
Describe de manera precisa los conocimientos (nivel superior) que este problema permite evaluar, indicando qué conocimientos deben estar disponibles (útiles a iniciativa del estudiante) de los que deben ser móviles (utilizables por el alumno a solicitud del exterior), distinguiendo conocimientos puramente matemáticos de los de orden heurístico y metodológicos.

Tercero
Propón un texto para el mismo tema, pero para una utilización en tiempo no limitado (por ejemplo para trabajo en casa ó en pequeños grupos de trabajo). Precisa los objetivos de aprendizaje y los conocimientos que pondrán en juego los estudiantes.

Todas sus respuestas deben ser precisas y sólidamente argumentadas. Si lo juzgas necesario puedes incluir la resolución de ciertas partes del problema a fin de sostener ó ilustrar su argumentación.

En todo esta sección n designará un entero positivo no nulo. A todo entero natural n no nulo, asociamos la función numérica f_n definida sobre $(-1, +\infty)$ por la expresión:

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

Dedicaremos este problema al estudio de la familia de funciones f_n y al de las sucesiones ligadas a estas funciones f_n. Designaremos por C_n a la curva representativa de f_n en el eje de coordenadas cuya unidad gráfica es 2 centímetros.

PROBLEMA PRIMERO

1. Estudio de las funciones f_n

(a) Sea $h_n(x) = n\ln(1 + x) + x / (1 + x)$
Estudia el sentido de variación de h_n
Utilizando el valor de $h_n(0)$, determina el signo de la función $h_n(x)$ sobre $(-1, +\infty)$

(b) Para toda x perteneciente a $(-1, +\infty)$ verifica que
$f_1'(x) = h_1(x)$
y que para todo n estrictamente superior a 1,
$f_n'(x) = x^{n-1}h_n(x)$

(c) Supón n impar. Para todo x perteneciente a $(-1, +\infty)$, justifica que f_n' y $h_n(x)$ tienen el mismo signo.

Diseña entonces la tabla de variaciones de la función f_n cuando n es impar precisando sus límites en -1 y en $+\infty$.

(d) Supón n par. Diseña una tabla de variaciones de f_n cuando n es par, y precisa sus límites en -1 y en $+\infty$.

(e) Estudia la posición relativa de las curvas C_1 y C_2

(f) Traza estas dos curvas.

2.Estudio de la sucesión.

En esta parte, U designa la sucesión de término general U_n definida para todo natural por:

$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x)\,dx$$

(a) Estudio de la convergencia

(i) Demuestra que:
$$0 \le U_n \le \ln 2 / (n + 1)$$

(ii) Deduce entonces que la sucesión U es convergente y da su límite

(iii)Con ayuda de lo obtenido en (i) determina un entero natural n_0 tal que para todo $n \ge n_0$ se tiene:
$$0 \le U_n \le 1/100$$

(b) Cálculo de U_1

i) Recuerda que para todo x en el intervalo $(-1, +\infty)$, se tiene :

$$\frac{x^2}{1+x} = x-1+\frac{1}{1+x}$$

calcula

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$$

(ii)Calcula U1 por medio de una integración por partes.

(c) Cálculo de U_n

Para todo x del intervalo (-1, +∞) y para todo $n \geq 2$, escribimos:

$S_n(x) = 1 - x + ... + (-1)^n x^n$ (1)

(i) Demuestra que:

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \quad (2)$$

(ii) Utilizando sucesivamente las expresiones (1) y (2) de $S_n(x)$, establece la igualdad

$$1-\frac{1}{2}+...+\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

(iii)Utilizando una integración por partes y el resultado anterior demuestra que:

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1-\frac{1}{2}+...+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$$

3. Aplicación

Sea E el conjunto de puntos M del plano, de coordenadas (x, y) verificando

$$0 \leq x \leq 1 \text{ y } f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$$

Calcula U_2 y deduce el área de E en cm^2 .

PROBLEMA SEGUNDO

Para las siguientes sucesiones de funciones, haga una clasificación lo más fina posible respecto del tipo de su convergencia.

S_1: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x/n$.

S_2: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$

S_3: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$

S_4: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} f_n(x) = 0 & x \in (-\infty,\ 0] \\ f_n(x) = x & x \in [0, 1/n] \\ f_n(x) = 1/n & x \in (1/n, \infty) \end{cases}$

S_5: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$

S_6: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} f_n(x) = f_n(-x) & x \in (-\infty,\ \infty) \\ f_n(x) = nx & x \in [0, 1/\mathrm{n}] \\ f_n(x) = 1 & x \in (1/\mathrm{n},\ \infty) \end{cases}$

S_7: $\forall\, n \geq 2,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0] \\ \dfrac{x}{n} & x \in (0, 1] \\ \dfrac{n^2 - x}{n(n^2-1)} & x \in (1, \infty) \end{cases}$

S_8: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} f_n(x) = 0 & x \in (-\infty, 0) \\ f_n(x) = nx & x \in [0,\ 1/n] \\ f_n(x) = -nx + 2 & x \in (1/n,\ 2/n] \\ f_n(x) = 0 & x \in (2/n,\ \infty) \end{cases}$

S_9: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} f_n(x) = f_n(-x) & x \in (-\infty,\ \infty) \\ f_n(x) = n^2 x & x \in [0,\ 1/n] \\ f_n(x) = n & x \in (1/n, \infty) \end{cases}$

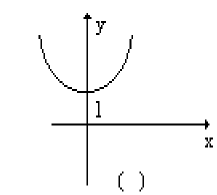
S_{10}: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} f_n(x) = 0 & x \in (-\infty,\ 0) \\ f_n(x) = n^2 x & x \in [0,\ 1/n] \\ f_n(x) = -n^2 x + 2n & x \in (1/n,\ 2/n] \\ f_n(x) = 0 & x \in (2/n,\ \infty) \end{cases}$

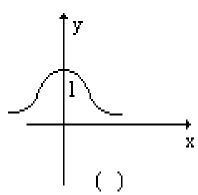
S_{11} $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$

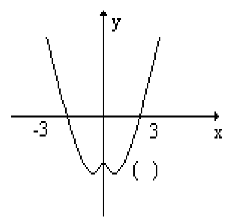
S_{12} $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$

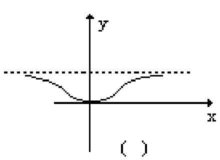
1. Enseguida aparecen una lista de 18 expresiones algebraicas y una colección de 12 gráficas. Busca hacer corresponder a cada gráfica una sola expresión analítica, elígela dentro de la lista:

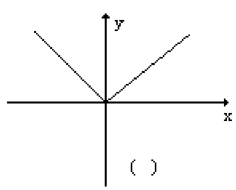
- (a) $y = 1 + 1 / (x - 2)^2$
- (b) $y = 1 / (x + 2) + 1$
- (c) $y = e^x$
- (d) $y = x / (x^2 + 1)$
- (e) $y = (x^2 + 1) / x$
- (f) $y = x^2 + 1$
- (g) $y = e^{-x}$
- (h) $y = 1 / (x^2 + 1)$
- (i) $y = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x$
- (j) $y = x + \operatorname{sen} x$
- (k) $y = x^2 - 2|x| - 3$
- (l) $y = -\ln x$
- (m) $y = \ln(-x)$
- (n) $y = 1 - 1 / (x^2 + 1)$
- (o) $y = |\, x \,|$
- (p) $y = x^2 / (x + 1)$
- (q) $y = \sqrt{(\operatorname{sen} x)} + \sqrt{(\cos x)}$
- (r) $y = \operatorname{senh}(x - 1)$

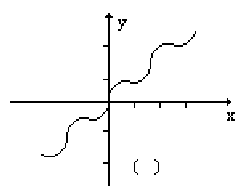


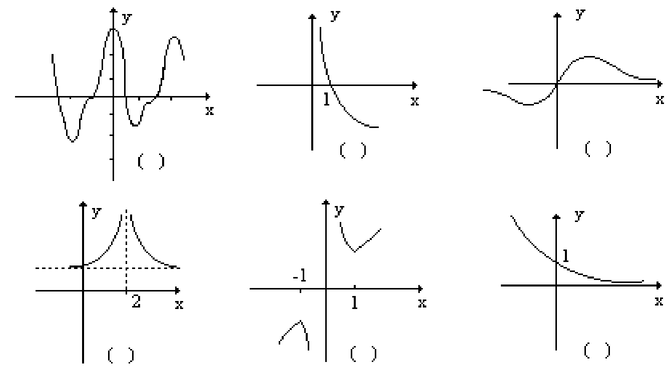




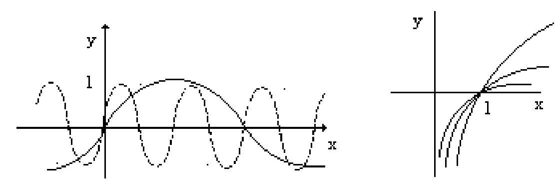




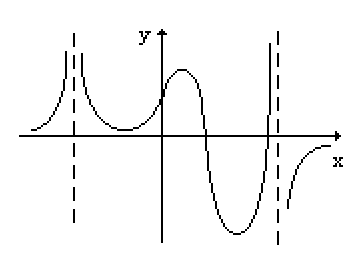




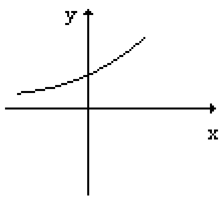
2. Enseguida aparecen dos sistemas de coordenadas con algunas curvas, para cada conjunto de curvas encuentre una posible relación funcional entre ellas. Recuerda que puede haber mas de una forma de lograrlo.

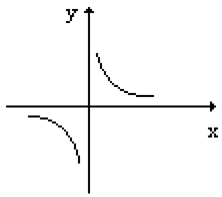


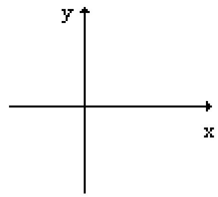
3. Dada la gráfica de $y = f(x)$, bosqueja entonces la gráfica de cada una de las funciones que se te indican
(a) $y = -f(x)$
(b) $y = f(-x)$
(c) $y = |f(x)|$
(d) $y = f(|x|)$
(e) $y = 1 / f(x)$
(f) $y = f^{-1}(x)$. Sólo donde el dominio de f lo permita.
(g) Con valores numéricos concretos, elabora una expresión funcional para f.



4. Dadas las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. Construye la gráfica de la composición $(f \circ g)(x)$







5. Dadas las funciones f y g, encuentra las funciones h e i dadas por $h(x) = (f \circ g)(x)$, $i(x) = (g \circ f)(x)$. Esboza las gráficas de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $i(x)$, finalmente determina el rango en todos los casos.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases} \quad y \quad g(x) = |x+1|$$

6. Estudia las siguientes funciones. Bosqueja lo mas completamente que te sea posible.

(a) $f(x) = \log_3\left(x^2 - 5x + 6\right)$

(b) $f(x) = 2^{1/x}$

(c) $f(x) = -2\,\text{sen}\left[(x-\pi)/3\right] + 5$

(d) $f(x) = \left|e - e^x\right|$

(e) $f(x) = \text{arcsen}(\log x)$

(f) $f(x) = |\text{sen}\, x| + |\cos x|$

(g) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} + \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$

(h) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x}$

(i) $f(x) = \sqrt{5-x} + 8$

(j) $f(x) = \left|x^3 - 3x + 2\right| + |5-x|$

SECCIÓN III

1. Resuelve las siguientes ecuaciones y desigualdades expresando la solución en forma de intervalos.

   (a) $\dfrac{|x+5|+|x-3|}{|x+3|+|x-5|}>1$

   b) $\left||3x-2|-8\right| \geq \left|\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2-3\right|$

   (c) $\log_{\frac{1}{2}}(1+x)\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\geq 1$

   (d) $\left|\dfrac{3x+2}{8x+1}\right|<x+2$

   (e) $\operatorname{sen} x\, \cos\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=0$

2. Encuentra el mínimo de la función, donde $a<b<c<d$.

   $\phi(x)=|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$

3. Si x_1, x_2, x_3 son las raíces de x^3 - x^2 - 1 = 0. Construye una ecuación cuyas raíces sean,

   $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_3 + x_1$, $y_3 = x_1 + x_2$.

4. Dados a y b números positivos, localiza el mínimo de la función
$$f(x)=\frac{x}{ax^2+b}.$$

5. Encuentra un intervalo que contenga a una solución de la ecuación trigonométrica sen$x = x + 1$.

SECCIÓN IV

1. Si $g(-1) = 1$, $g'(-1) = 2$ y $f'(1) = -1$ evalúa

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(g\left(-\frac{1}{2}x\right)\right)\right] \text{ en } x = 2$$

2. Si a es una constante positiva, prueba que

$$\int_{-1}^{1}\frac{a^x}{1+a^x}\,dx = 1.$$

3. Considera a la función G dado por la expresión:

$$G(x) = \int_0^x \sqrt{16-t2}\;dt$$

(a) ¿Cuál de las siguientes igualdades es correcta? $G(2) = -G(-2)$ ó $G(2) = G(-2)$

(b) ¿Cuánto valen $G(0)$, $G'(2)$ y $G(4)$?

4. ¿Por qué crees que la función f luce igual que la función g en la pantalla de tu supercalculadora? Las funciones están dadas por:

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{10\pi}\right);\ g(x) = 1$$

5. Construye dos argumentaciones de que $2 < \int_0^4 \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx < 4$

6. Encuentra $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{t}\,dt$

7. La figura (A) te muestra la gráfica de la función derivada f'. Si la función de la que aquella es derivada está limitada a $f:[-3, 3]\to\mathbb{R}$, contesta las siguientes preguntas

   (a) ¿Para qué valores de x en (-3,3) f tiene un máximo relativo? Un mínimo relativo? Justifica.

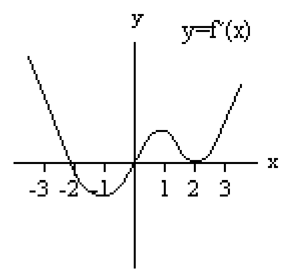
   (b) ¿Para qué valores de x es la gráfica de f cóncava hacia arriba?

   (c) Usa los incisos (a) y (b) y el hecho de que $f(-3) = 0$ para trazar una posible gráfica de f.

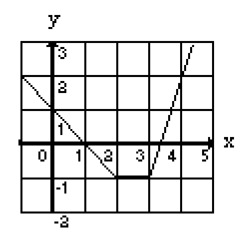
8. Sea $f(x)$ una función cuya gráfica se exhibe en (B)

   (a) Aproxima el valor de $\int_0^4 f(x)dx$

   (b) Para qué valor de a, $0 \le a \le 4$ tiene $\int_0^a f(x)dx$ el valor más pequeño?



(A)



(B)

9. Supón que $\int_0^x f(t)dt = x + \int_1^x t\,F(t)dt$. Da una expresión algebraica explícita para $f(x)$.

10. ¿Para qué valor(es) de x la pendiente de la línea tangente a la curva $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ tiene el valor más grande? Justifica.

SECCIÓN V

1. Si $y = f(x)$, encuentra $\int (x + y\,y')dx$.

2. Sea $g(x, y) = xy\,f(x, y)$, donde

$$f(2,1) = 1, \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = -1 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = -1.$$

Encuentra el valor de $\frac{\partial g}{\partial y}(2,1)$.

3. Encuentra un punto silla y un número local de la función

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

4. Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{3n^2+1} \operatorname{sen} n = 0$

5. Sea Ω la región comprendida entre las curvas $y = x^2$ & $y = x^3$, evalúa la integral siguiente.

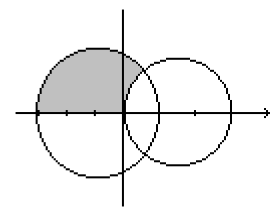
$$\iint\limits_{\Omega} xy^2\,dx\,dy$$

6. Existen o no los siguientes límites, en su caso encuéntralos

(a) $\lim\limits_{h\to 0} (1-2h)^{\frac{1}{h}}$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^{1/3}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{2/n}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{1+x}\right)}{x-1}$

7. ¿Cuál de las siguientes integrales puede representar el área de la región sombreada?



(a) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{(2-\cos\theta)^2}{2}\,d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{(2-\cos\theta)^2}{2}\,d\theta$

(b) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2}(2-\cos\theta)\,d\theta - \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{2}(3\cos 3\theta)\,d\theta$

(c) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2}(2-\cos\theta)^2\,d\theta - \int_{0}^{\pi/3} \frac{1}{2}(3\cos\theta)^2\,d\theta$

(d) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2}(2-\cos\theta)^2\,d\theta - \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{2}(3\cos\theta)^2\,d\theta$

(e) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2}(2-\cos\theta)^2\,d\theta - \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2}(3\cos\theta)^2\,d\theta$

8. $\int_0^{0.6} \frac{\text{sen}\, x}{x} dx$ es próximo a $\begin{cases} 0.302 \\ 0.602 \\ 0.282 \\ 0.988 \\ 0.588 \end{cases}$ (no se requiere usar calculadora) ¿por qué ?

9. Sea x una cantidad positiva pequeña, ¿cuál de las siguientes desigualdades es correcta?

   (a) $x < \text{sen}x < e^x - 1$ (b) $\text{sen}x < x < e^x - 1$

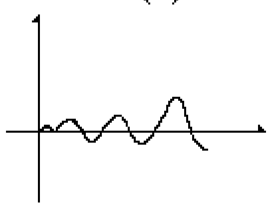
   (c) $e^x - 1 < \text{sen}x < x$ (d) $e^x - 1 < x < \text{sen}x$

   (e) $\text{sen}x < e^x - 1 < x$

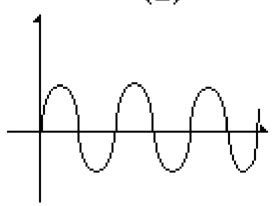
10. Con argumentos puramente gráficos muestra que la ecuación diferencial $y' = y$ no puede tener soluciones que cambien de signo.

11. ¿Cuál de los siguientes bosquejos puede ser la gráfica de la solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + y = 0$ con la condición inicial siguiente $y(0) = 0$, $y'(0) > 0$, $y''(0) > 0$?

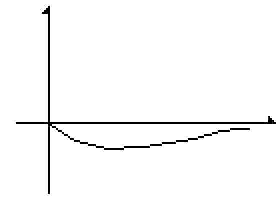
(A)



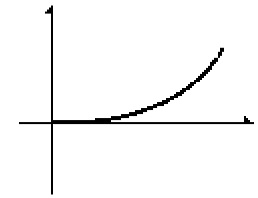
(B)



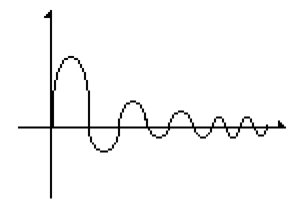
(C)



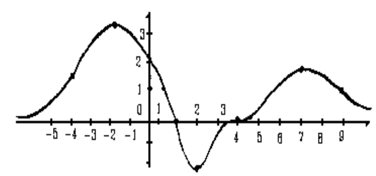
(D)



(E)



12. La gráfica de una función f definida en $\mathbb{R}$ está dada como sigue



Bosqueja las gráficas de

(a) $\int_0^x f(t)dt$ (b) $1 / [f(x)]^2$ (c) $f'(x)$

(d) $f(2-x)$ (e) $1 + f(x^2)$ (f) $f(f(x))$

13. Sea $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si} \quad x\neq 0 \end{cases}$

Establece si $f'(0)$ y $f''(0)$ existen, y de ser así calcúlalas.

14. Verifica que se cumplen las igualdades siguientes:

$$\int_0^{2x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt=\int_0^{x} \frac{\operatorname{sen} 2t}{t}dt=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}+\int_0^{x} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}dt$$

y deduce que la integral impropia $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$ converge.

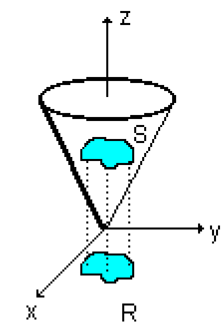
1. ¿Cuál es la ecuación diferencial parcial obtenida de la ecuación

$$5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

al substituir $x = 25 - t$, $y = s - t$?

2. Prueba que el área de la región S sobre el cono $z=a\sqrt{x^2+y^2}$ que está sobre R satisface la relación

Área de $S=\sqrt{a^2+1}$ (área de R)



3. Sea $f\,(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$ y supón que una partícula está sobre el plano *xy* en el punto (1, 0, 0). ¿En qué dirección habría de viajar dicha partícula en el sentido de que las imágenes de la función f decrezcan lo más rápido posible?

4. Sea $f\,(x, y) = |\,1 + x^2 - y\,|$. ¿Existe $f_x(0, 1)$? ¿Existe $f_y(0, 1)$?

5. Encuentre la curva de nivel de

$$f(x,y) = e^{y(x^2-1)} \text{ en } z = 1.$$

6. Se dan algunos valores de la función $f\,(x, y)$. $f\,(2.5, 2) = 1.899$, $f\,(2.5, 2.5) = 1$, $f\,(4,1) = 4$, $f\,(4,2) = 2.203$. Suponiendo que nada “inesperado” sucede con la superficie entre los valores dados, responde a las siguientes preguntas

(a) Si $\bar{u}$ es un vector unitario en la dirección noroeste ¿cuál de los siguientes números mejor aproxima a $f_{\underset{u}{\rightarrow}}(3,2)$?

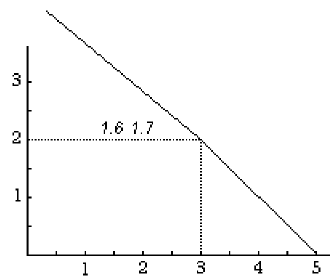
(a) -√2 (b) -1 (c) 0

(d) 1 (e) √2

b. ¿Cuál de los siguientes números aproxima mejor a $f_x(3, 2)$?

(a) 0 (b) 0.1 (c) 0.2

(d) 0.5 (e) 1



7. Cerca del punto (1, 2), ¿es $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3$ más sensible al cambio en x o al cambio en y? ¿Cómo lo sabes?

8. Una prueba de la regla de Leibniz. La regla de Leibniz dice que si f es continua en $[a, b]$ y si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones derivables para x en $[a, b]$, entonces

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{\upsilon(x)} f(t)dt = f(\upsilon(x))\frac{d\upsilon}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

Prueba la regla tomando $g(u,\upsilon) = \int_u^{\upsilon} f(t)dt,\ u = u(x),\ \upsilon = \upsilon(x)$ y calculando $\frac{dg}{dx}$ con la regla de la cadena.

9. Encuentra los puntos de la superficie $xyz = 1$ más cercanos al origen de coordenadas.

10. Encuentra el volumen del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z + y = 3$.

11. Deduce el criterio de la segunda derivada para optimizar funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

12. Explica con el auxilio de elementos geométricos, el efecto que tienen los multiplicadores (las formas λ) de Lagrange sobre la gráfica de la función original (función a optimizar sujeta a una restricción).

13. Sea $\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$. Prueba que

    a. $\mathrm{I}_n = \dfrac{4}{n+1} - \mathrm{I}_{n+2} \left(n = 0, 1, 2 \ldots \right)$

    b. $\tan x \leq \dfrac{4x}{\pi} \left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} \right)$

    c. $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{I}_n = 0$

    d. $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{11} + \ldots = \dfrac{\pi}{4}$

    e. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8} + \ldots = \dfrac{1}{2} \log 2$

SECCIÓN VII

1. Resuelve la ecuación sen$x = x + 1$

2. Encuentra la expresión de la sucesión de las sumas parciales asociadas a las siguientes sumatorias y evalúa su suma

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

3. Para el concepto de función establece los contextos algebraico, geométrico y numérico asociados. Ejemplifica cada uno de ellos exhibiendo el tipo de preguntas y las "reglas del juego" que tienen lugar, es decir, el cómo se espera la solución.

4. Grafica con y sin cálculo. Discute las ventajas y limitaciones de cada solución.

   (a) $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}+\frac{\cos x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$

   (b) $g(x)=2^{\operatorname{sen}(x+1)}$

5. Grafica $f(x) = \cos 2x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ en un mismo sistema de coordenadas. Construye la gráfica del producto $f(x)\,g(x)$.

SECCIÓN VIII

1. Desarrolla en serie de Taylor a la función $f(x) = x\operatorname{sen} x$ con $a = 0$.

2. Determina si la siguiente integral es divergente o convergente y en su caso encuéntrala,

$$\int_0^3 \frac{dx}{\left(9-x^2\right)^{3/2}}$$

3. Resuelve la siguiente integral

$$\int \frac{e^{2y}}{\left(9-16e^{2y}\right)^{1/2}}\,dy$$

4. Decide sobre la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-n}\left\{n-\operatorname{sen}(n)\right\}+1\right)$$

5. Se trata de calcular la longitud de una curva desde el punto a hasta el b que está dada por la ecuación siguiente. Calcúlala.

$$f(x)=\int\sqrt{\left(\frac{\cos^3 x}{1-\cos x}\right)^2-1}+C.$$

6. Demuestra que si una sucesión es convergente, entonces ocurre que su límite es único.

7. Sea $f(x) = 3x + 2$. A partir de la gráfica de la función encuentra el punto $(x_o, f(x_o))$ tal que,

$$\int_5^7 f(x)dx = 2f(x_0)$$

8. Muestra que la ecuación $x2^x = 1$ tiene, por lo menos, una raíz positiva no mayor que uno.

9. Supongamos que f es una función definida en el intervalo $[a, b]$. Además $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \ldots = f(x_n) = 0$ y estos números $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$ son los únicos en los que se anula f. Demuestra que en cada uno de los intervalos (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, b) la función no cambia de signo.

SECCIÓN IX

1. Suponiendo que conocemos a $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

(a) Calcula $\int_0^{\infty} 2^{-x^2}\,dx$

(b) Demuestra la primera identidad

2. Si $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ ¿Cómo puedes mostrar que $F(x)$ es la función logarítmica? No emplees el teorema fundamental del cálculo.

3. Supón que $\operatorname{sen} x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)$ y obtén la descomposición en fracciones parciales siguiente:

$$\operatorname{ctg} x = \ldots + \frac{1}{x+2\pi} + \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\pi} + \frac{1}{x-2\pi} + \ldots$$

usa el resultado para demostrar que:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2}\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) - \frac{2x^3}{\pi^4}\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4}\right) - \frac{2x^5}{\pi^6}\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^6}\right) \ldots$$

4. Da métodos deferentes para el cálculo de sumas del tipo

$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k, \qquad n, k \in \mathrm{N}$

5. Calcula $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n}, \ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{2^n}$

SECCIÓN X

Supongamos que las funciones f y g están definidas en todo $\mathbb{R}$

1. Si $F(x, y) = f(x) + g(y)$. ¿Cómo se expresa $F(x, y)$ en serie de Taylor en términos de f y g en el punto (0, 0)?

2. Si $G(x, y) = f(x)\, g(y)$ ¿Cómo se expresa en serie de Taylor con respecto a f y g en el punto (0, 0)?

3. Si $H(x, y) = f(x) / g(y)$ ¿Cómo se expresa en serie de Taylor con respecto a f y g en el punto (0, 0)? Además $g(y) \neq 0$ en $\mathbb{R}$

4. Supón que $w = f(x, y), x = r\cos\theta, y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Prueba que se cumple la igualdad

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

5. Encuentra los valores máximo o mínimo de la función siguiente: $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

6. Clasifica los puntos críticos de la función

$g(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)e^{x^2 - y^2}$

7. Evalúa la integral mediante un cambio en el orden de integración

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\mathrm{sen}\, x}{x}\, dxdy$$

SECCIÓN XI

1. Enseguida aparecen los términos generales de cuatro sucesiones distintas. Escribe, para cada una de ellas, los cinco primeros términos y bosqueja su gráfica.

   (a) $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$

   (b) $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}$

   (c) $c_n = \cos(n\pi)$

   (d) $d_n = 1,\ d_{n+1} = \dfrac{1}{1+d_n}$

2. Construye una fórmula para el término general de las siguientes sucesiones. (uno para cada una de ellas)

   (a) $\{1, 4, 7, 10, \ldots\}$

   (b) $\left\{\dfrac{3}{2}, -\dfrac{9}{4}, \dfrac{27}{8}, -\dfrac{81}{16}, \ldots\right\}$

   (c) $\{0, 2, 0, 2, 0, \ldots\}$

   (d) $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \ldots\right\}$

3. Con tu calculadora estima el límite de cada una de las sucesiones dadas

   (a) $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$

(b) $a_n = \sqrt[n]{5^n + 7^n}$

(c) $b_n = \dfrac{\sqrt{\dfrac{9n+2}{n}} - 3}{\dfrac{2}{n}}$

(d) $c_n = \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{\cos\left(\dfrac{5}{n}\right)}{10{,}000}$

4. Calcula el límite -cuando exista- de las sucesiones dadas por su término general

(a) $a_n = \dfrac{4n-3}{3n+5}$

(b) $b_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

(c) $c_n = \dfrac{\operatorname{sen}^2(n)}{\sqrt{n}}$

(d) $d_n = \sqrt[n]{3^n}$

5. ¿Qué entiendes por la expresión:

(a) $a_n \to a$ cuando $n \to \infty$?

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$?

6. Escribe la definición de límite de una sucesión numérica infinita. Con y sin cuantificadores.

7. ¿Qué entiendes por la expresión:

   (a) $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$?

   (b) $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = a$?

8. ¿Qué entiendes por la expresión π2? ¿Cómo puedes calcularla?

9. Demuestra que $\lim_{n\to\infty} \frac{5n+1}{7+7n} = \frac{5}{7}$

10. Demuestra que si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ entonces se cumple que $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

11. Demuestra que toda sucesión convergente es acotada.

12. Demuestra que si una sucesión es convergente entonces su límite es único.

13. Construye dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que

   (a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, pero que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 3$

   (b) $a_n \to 0$ y $b_n \to 0$, pero que $\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = 2$

   (c) a_n diverja a ∞ y que $b_n \to 0$; tal que $a_n b_n \to 5$

   (d) $a_n \to -\infty$ y que $b_n \to \infty$, tales que $a_n - b_n \to 4$

14. Construye una sucesión de:

    (a) racionales que converjan a un número irracional

    (b) irracionales que converjan a un número racional

15. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe y $\lim_{n\to\infty} b_n$ no existe, ¿podría darse el caso de existir el $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$? ¿Conoces algún ejemplo?

16. ¿Alguno de los siguientes es un teorema? ¿Por qué?

Si $\lim_{n\to\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} a_n b_n$	entonces $\lim_{n\to\infty} b_n$
existe	existe	existe
no existe	existe	no existe
no existe	no existe	no existe
existe	no existe	existe

17. Construye varias sucesiones $\{a_n\}$ y varias $\{b_n\}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad \lim_{n\to\infty} a_n^{\,b_n} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

18. Prueba por inducción matemática que 2n > n para todo n ∈ N

19. Demuestra que los racionales son densos

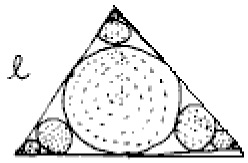
20. Demuestra que si 0 < a < b, entonces

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

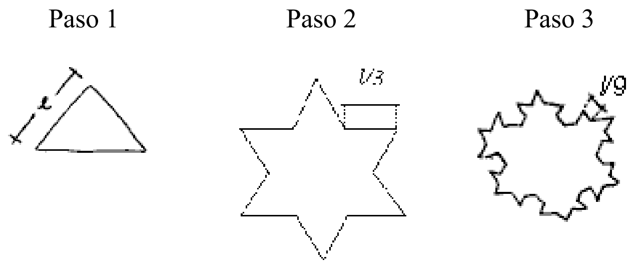
21. Demuestra que los irracionales son densos

22. Demuestra que entre dos racionales siempre habrá un irracional

23. En la figura se bosquejan una infinidad de círculos aproximando a los vértices de un triángulo equilátero. Cada círculo es tangente a otro círculo y a los lados del triángulo. Si el triángulo tiene lados de longitud l, encuentra el área total ocupada por los círculos



24. En la figura se bosqueja los primeros pasos de un proceso infinito. Cada lado genera un triángulo nuevo. El triángulo equilátero inicial tiene lados de longitud l. Para cada paso, encuentra el perímetro que rodea la superficie



Triángulo Equilátero cuyos lados miden una unidad	Se divide cada lado en tres partes iguales. Sobre el tercio medio se construye un nuevo triángulo equilátero y se borra su base.	Se sigue este proceso sucesivamente, obteniéndose el llamado copo de nieve en cada paso.

25. ¿Cómo le explicarías a un estudiante de secundaria (12-15 años) el concepto de sucesión numérica?

26. ¿Cómo le enseñarías a un estudiante de bachillerato (16-19 años) el concepto de límite de una sucesión numérica infinita.

27. Explica la regla de L'Hôpital. Da algunos ejemplos.

28. ¿Cuál de las siguientes te parece más adecuada como definición de límite de una sucesión? ¿Por qué?

29. Constituye una sucesión que diverja y que:

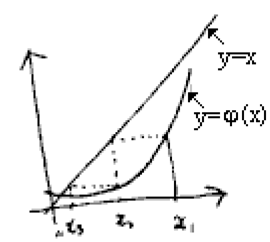
    (a) se dispare a $+\infty$

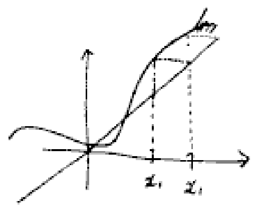
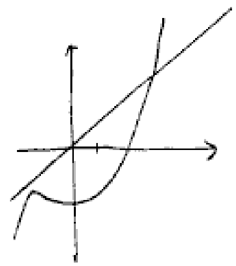
    (b) se dispare a $-\infty$

    (c) no llegue a ningún número

30. Construye la sucesión que se observa del dibujo

(b)



(c) Interpreta el límite de la sucesión que obtienes en el inciso (a)

(d) Interpreta el límite de la sucesión que se tiene en el inciso (b)

31. Toma a la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $\alpha \in (a, b)$. Demuestra que existe una vecindad centrada en α dentro del intervalo (a, b), tal que $f(x) > 0$ en ella; donde $f(\alpha) > 0.32$. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x \in \{0\} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap (0,1] \end{cases}$$

tales que $x = p / q$ con p, q enteros positivos y $(p, q) = 1$

Demuestra que la función f es discontinua en $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y continua en $\mathbb{I} \cap [0, 1]$

33. Demuestra que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^k}{e^x}$ vale cero, para todo $k \in \mathbb{R}$.

34. Considera a la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ creciente:

(a) demuestra que si f tiene su gráfica cóncava, entonces

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)dx \langle (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(b) demuestra que si f tiene su gráfica convexa entonces

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} < \int_a^b f(x)dx < (b-a)f(b)$$

(c) aplicando los resultados anteriores, aproxima el valor de

$$\int_2^3 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

35. Sea $\zeta \in C^2([a, b])$. Si la tangente a la gráfica de la función $y = \zeta(x)$ en el punto $(a, \zeta(a))$ forma un ángulo de $\pi/3$ con el eje de las abscisas, mientras que en el punto $(b, \zeta(b))$ forma un ángulo de $\pi/4$. Calcula las integrales:

$$\int_a^b \zeta''(x)dx \quad \text{y} \quad \int_a^b \zeta'(x)\zeta''(x)dx$$

36. Decide sobre la convergencia o divergencia de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}$$

37. Enuncia, explica y prueba los siguientes teoremas de los medios. Destaca las filiaciones y las condiciones de su aplicabilidad. Procura vincularlos con la continuidad de los reales en cualquiera de sus versiones.

(a) Teorema del valor intermedio

(b) Teorema de Rolle

(c) Teorema del valor medio para derivadas

(d) Teorema del valor medio para derivadas generalizado

(e) Teorema del valor medio para integrales

(f) Serie de Taylor con residuo

SECCIÓN XII

1. Si la serie de Taylor de ln$x$ se trunca después del término que lleva $(x - 1)^{1000}$ y tal polinomio es usado para calcular el ln2, ¿qué cota podemos dar al error de la aproximación?

2. Prueba que la función $f(x) = x\text{sen}(1 / x)$ con $f(0) = 0$ es continua en 0, pero no derivable en 0.

3. Determina si la función es continua, y una o dos veces derivable

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x - 1 & x \leq 0 \\ x^3 - x - 1 & x > 0 \end{cases}$$

4. Sea $f(x) = x^{-3}(x - \text{sen}x)$, para x $\neq 0$. ¿Cómo deberías definir $f(0)$ para que f sea continua? ¿Cómo para que sea derivable?

5. Asumamos que k es un entero positivo y tomemos 0 < (< 1. ¿A qué clase de $C^n(\mathbb{R})$ pertenece la función $x^{k+(}$?

6. Demuestra que si $f \in C^n(\mathbb{R})$, entonces $f' \in C^{n-1}(\mathbb{R})$ y $\int_a^x f(t)dt$ pertenece a $C^{n+1}(\mathbb{R})$.

7. Demuestra el teorema de Rolle directamente, es decir, sin hacer uso del teorema del valor medio.

8. Demuestra que si $f \in C^n(\mathbb{R})$ y $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) = 0$ para $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, entonces $f^{(n)}(\zeta) = 0$ para algún $\zeta \in (x_0, x_n)$.

9. (a) Obtén la fórmula de Taylor en 0 para la función $\ln(x + 1)$. Escribe esta serie en forma de sumatoria. Da dos expresiones para el residuo cuando la serie se trunca.

   (b) Determina el número mas pequeño de términos que debes tomar en la serie para que obtengas ln1.5 con un error menor que 10^{-8}.

   (c) Determina el número de términos necesarios para calcular ln1.6 con un error menor a 10^{-10}.

10. Para valores pequeños de x se suele aproximar $\operatorname{sen} x \approx x$. Estima el error usando esta fórmula con la ayuda del teorema de Taylor. ¿Para qué rango de valores de x dará esta aproximación resultados correctos para seis lugares decimales?

11. Para valores pequeños de x, ¿qué tan buena es la aproximación $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$? ¿Para qué rango de valores dará esta aproximación resultados correctos para tres lugares decimales?

12. Critica este razonamiento, la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & x \le 0 \\ x^3 - x & x > 0 \end{cases}$$

tiene las propiedades

$$\lim_{x \to 0^+} f''(x) = \lim_{x \to 0^+} 6x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f''(x) = \lim_{x \to 0^-} 6x = 0$$

Luego f'' es continua.

13. Prueba que si f es derivable en x entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{2h} = f'(x)$$

14. Demuestra o refuta esta afirmación: Si f es derivable en x, entonces para $\alpha \neq 1$ se tiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x+\alpha h)}{h-\alpha h}$$

15. Prueba que la sucesión dada por $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada por 3.

16. Prueba que $x_n = x + o(1)$ si y solamente si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

17. Para n fija, prueba que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} + o(x^n)$ cuando $x \to 0$.

18. Probar que si $x_n = o(a_n)$, entonces $x_n = O(a_n)$. Probar que el converso no es cierto.

19. Sea una sucesión x_n, definida inductivamente por $x_{n+1} = F(x_n)$. Supón que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ y $F'(x) = 0$. Prueba entonces que $x_{n+2} - x_{n+1} = o(x_{n+1} - x_n)$.

SECCIÓN XIII

1. Considera que el método de bisección se ha aplicado a una función continua, resultando de la aplicación una sucesión de inter-

valos cerrados $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, etc. Sea $r = \text{lím}_{n((}\, a_n$ ¿Cuál de los siguientes incisos puede ser falso?

(a) $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$

(b) $| r - 2^{-1}(a_n + b_n) | \leq 2^{-n} (b_0 - a_0)$, para $n \geq 0$

(c) $| r - 2^{-1}(a_{n+1} + b_{n+1}) | \leq | r - 2^{-1}(a_n + b_n) |$, para $n \geq 0$

(d) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, para $n \geq 0$

(e) $| r - a_n | = O(2^{-n})$ cuando $n \to \infty$

(f) $| \mathrm{r} - c_n | < | r - c_{n-1}|$, para $n > 1$

2. Encuentra el positivo mas pequeño, de modo que al tomarlo como punto de partida en la aplicación del método de Newton a la ecuación $f(x) = \tan^{-1} x$, la sucesión diverge.

3. Usando la serie de Taylor para $f(x + h)$ y para $f(x + k)$, obtén la siguiente aproximación para $f'(x)$

$$f'(x) \approx \frac{k^2 f(x+h) - h^2 f(x+k) + (h^2 - k^2) f(x)}{(k-h)kh}$$

4. Prueba que si $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, con F' continua, y si $F'(x) < 1$ sobre $[a, b]$ entonces F es una contracción ¿Tiene F necesariamente un punto fijo?

5. Usando la serie de Taylor y los argumentos de los órdenes de magnitud, encuentra el límite siguiente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^6}{x^{12}}$$

6. Construye una función derivable para la cual el método de aproximación de raíces de Newton produzca ciclos. Puedes dar una tabla de valores, una gráfica o una fórmula.

7. El método de Halley para resolver la ecuación $f(x) = 0$ utiliza la fórmula de iteración siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{\left[f'(x_n)\right]^2 - 2^{-1}f(x_n)f''(x_n)}$$

   Si sabes que este es una consecuencia del método de Newton. La pregunta es ¿a qué función se le ha aplicado el método de las tangentes?

8. Con cualquiera de los métodos resuelve la ecuación siguiente, obteniendo en tu solución una aproximación hasta de siete cifras decimales.:

$$5x^3 + 7x^2 + 21x - 12 = 0$$

9. Resuelve la ecuación $f(x) = 0$, aplicando dos de los programas que has elaborado. Uno de ellos deberá ser el método de Newton. La función está definida en todos los reales como sigue,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

   Discute con suficiente cuidado los resultados que obtienes.

10. Estudia la función $f(x, y) = x y^2 / (x^2 + y^4)$. Es decir, determina dominio, rango, gráfica, límites, continuidad, derivadas parciales, diferencial total, plano tangente, etc.

11. Estudia la función $w(z) = |z|$. Es decir, determina dominio, rango, representación gráfica, límites, continuidad, derivadas, diferencial, transformación conforme, etc.

12. Demuestra que si $z = z(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, entonces

    $$\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = \partial^2 z/\partial r^2 + r^{-2}\,(\partial^2 z/\partial \theta^2) + r^{-1}\,(\partial z/\partial r)$$

13. Desarrolla el siguiente tema:

    ❑ ¿Cuáles son los elementos principales del cálculo leibniziano y cuáles los del cálculo newtoniano? Procura hacer una análisis comparativo.

    ❑ ¿Por qué razón se considera que Euler desarrolló una teoría del analisis infinitorum y dentro de ella planteó un estudio de las series de seno, coseno, logaritmo, exponencial?

SECCIÓN XIV

1. Demuestra por inducción matemática que: $n + 1 > n$

2. Demuestra por inducción matemática que:

   $$\sum_{0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Prueba que el principio de inducción matemática es equivalente al principio del buen orden.

4. Deduce la fórmula para $r \neq 1$:

   $$\sum_{0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

   y pruébala por inducción matemática.

5. Explica por qué funciona el principio de inducción matemática y por qué no se puede aplicar a los:

(a) números racionales $\mathbb{Q}$

(b) números reales $\mathbb{R}$

(c) números irracionales $\mathbb{I}$

(d) números complejos $\mathbb{C}$

6. Si $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{I}$ ¿$a + b$ es necesariamente irracional? ¿y si a y b son irracionales?

7. Si $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{I}$, ¿ab es irracional?

8. Demuestra que $\sqrt{3}$ es irracional

9. Da TRES pruebas distintas de que $\sqrt{2}$ es irracional.

10. Demuestra que si $h > -1$, entonces $(1 + h)^n \geq 1 + nh$.

11. ¿Por qué 0^0 no está definido?

12. ¿Qué significa $\pi^{\sqrt{2}}$?

13. Explica de distintas maneras que son los números $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$.

14. Sea E subconjunto no vacío de un conjunto ordenado, supón que α es una cota inferior de E y β una cota superior de E. Demuestra que $\alpha \leq \beta$

15. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $A \neq \varnothing$. Además es acotado por abajo. Sea $-A$ el conjunto de todos los $-x$, donde $x \in A$. Prueba que:

$$\inf A = -\sup(-A)$$

16. Prueba que $\mathbb{C}$ no puede ser ordenado, de modo que la teoría del cálculo basada en el axioma de completez siga siendo válida.

17. Demuestra de tres maneras distintas que si $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

18. Define función, función par, función impar, función periódica. Dominio de f. Contradominio de f. Rango de f. Gráfica de f. Función uno a uno, función sobre, función uno a uno y sobre. Función inversa. Igualdad de funciones. Composición de funciones. Utiliza ejemplos, gráficas, tablas, fórmulas, descripciones verbales y la notación conjuntista.

19. Da tres distintas definiciones de función. Correspondientes con tres épocas históricas distintas. Documenta tus afirmaciones.

SECCIÓN XV

1. Usando el *factor de integración* encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales

   (a) $3y' + y = 4x + 3e^{2x}$

   (b) $y' + y = e^{-x}$

   (c) Discute el *comportamiento tendencial* de la solución $y(x)$ y de $F(x) = e^{-x}$ en el inciso anterior (un *comportamiento tendencial* puede ser un comportamiento asintótico de $y(x)$ a $F(x)$ en algún intervalo de los dominios de ambas funciones)

2. Una ecuación diferencial lineal de primer orden $ay' + y = F(x)$ tiene como solución a la función $y(x) = G(x) + Ce^{-(1/a)x}$.

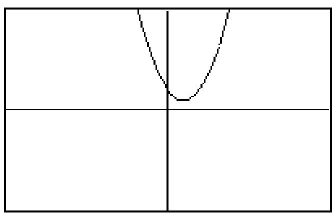
   (a) De la tabla siguiente asocia (indicándolo con una flecha) la ecuación diferencial y la función G(x), correspondiente, a la solución.

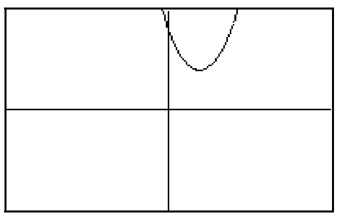
diferencial.

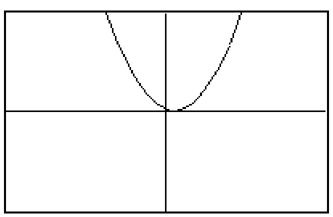
Tabla

ECUACIÓN DIFERENCIAL	$G(x)$
1. $y' + y = \operatorname{sen}x$	a) $4/5(\frac{1}{2}\operatorname{sen}x - \frac{1}{4}\cos x)$
2. $2y' + y = \operatorname{sen}x$	b) $1/5(\operatorname{sen}x - 2\cos x)$
3. $y' + 2y = \operatorname{sen}x$	c) $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}x - \cos x)$
	d) $\operatorname{sen}x - \cos x$

3. Las tres gráficas siguientes representan, respectivamente, la función $G(x)$ que constituye la solución de alguna ecuación diferencial. Establece tres ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, de acuerdo a los datos gráficos, que "aproxi-madamente" correspondan a la solución gráfica. Observación: las tres gráficas son parábolas, además considera condiciones iniciales para cada ecuación diferencial.


a)


b)


c)

4. Sabemos que $y = (x\text{-}1)^2 + 1 + Ce^{-x}$, es solución de la ecuación diferencial $y' + y = x^2$. Si $Y = -y + 5 + ce^{-x}$, ¿cuál es la ecuación diferencial de Y: $aY' + Y = F(x)$?

5. Bosqueje gráficamente una aproximación de la solución a la ecuación diferencial $y' + y = \text{sen}x$ (en el período $[0, 2\pi]$), estableciendo una función escalonada.

SECCIÓN XVI

1. Considera la ecuación diferencial $y''(x) + 3y'(x) + 4y(x) = 0$ y aplica una "iteración lineal" con A constante (elige un valor para A). Además, analiza el comportamiento gráfico de cada una de las soluciones de las ecuaciones diferenciales respectivas. Sugerencia: si Y_o es la ecuación diferencial y A el valor constante una "iteración lineal" puede ser $Y_1(x) = AY_o(x)$, $Y_2(x) = Y_o(x) + A$, $Y_3(x) = Y_o(Ax)$ y $Y_4(x) = Y_o(x + A)$

2. La función $y(x) = e^{-2x}(3\cos x + 2\text{sen}x)$ es la solución de una ecuación diferencial lineal de segundo orden:

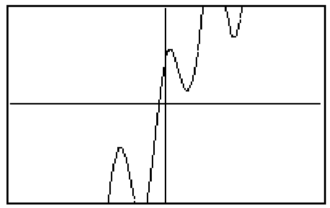
   (a) Encuentra la ecuación diferencial con condiciones iniciales.

   (b) Efectúa una "iteración lineal" sobre la solución y hallar las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden respectivamente.

   (c) Analiza el comportamiento gráfico entre cada una de las soluciones

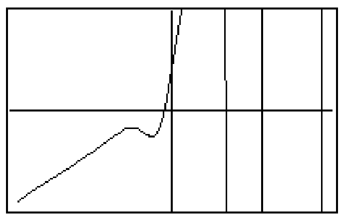
3. Asocia, en la tabla siguiente, con el número y la letra, las ecuaciones diferenciales y las gráficas de sus soluciones. Posteriormente, justifica tu asociación <u>sin</u> resolver algebrai-camente las ecuaciones.

A



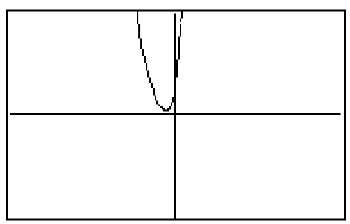
1. $y''(x) + y'(x) + y(x) = -x$

B.



2. $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0$

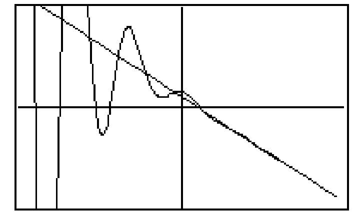
C.



3. $y''(x) + 4y(x) = 12x$

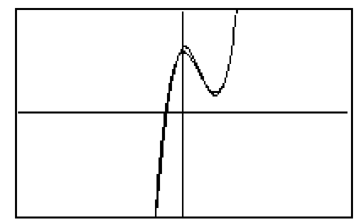
D.

4. $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 2x$



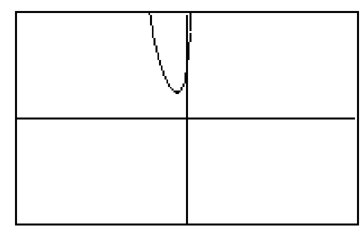
E.

5. $y''(x)-2y'(x)-3y(x) = 6$



F.

6. $y''(x) + y'(x) + y(x) = x^3$



4. La gráfica que aparece en la ventana (*fig.* 1) no es una parábola, sin embargo es solución de la ecuación diferencial $y''(x) + (a-b)y'(x) + (-ab)y(x) = 0$ con condiciones iniciales $y(0) = A$ y $y'(0) = B$, además los coeficientes a y b son positivos. Si la gráfica de la *figura* 1 se transforma en la gráfica de la *figura* 2, ¿cuál es la ecuación diferencial correspondiente a la solución que aparece en la *fig.* 2?

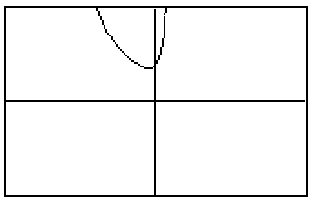


fig. 1

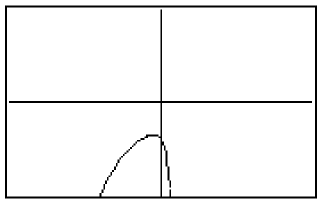


fig. 2

5. Considera el par de gráficas que aparecen el la *figura* 1, y establece una ecuación diferencial lineal de segundo orden cuya solución bosqueje la solución $y(x)$ representada en la *figura* 2.

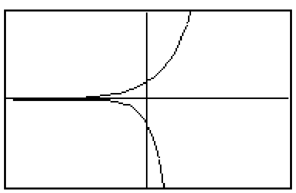


fig. 1

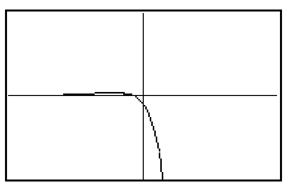


fig. 2

6. Dada la siguiente ecuación diferencial $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = x^2$, hallar su solución de las siguientes tres maneras:

(a) considerando el método de los coeficientes indeterminados

(b) considerando el método de Euler (transformación de la ecuación diferencial de segundo orden a primer orden)

(c) considerando la Serie de Taylor

Luego, de cada uno de los incisos anteriores hacer un tratamiento gráfico considerando las siguientes instrucciones:

-en el inciso (a) bosqueja la solución propuesta (con coeficientes indeterminados) y la solución particular encontrada.

-en el inciso (b) grafica $F(x)$ de la ecuación diferencial y la gráfica $G(x)$ de la ecuación transformada.

-en el inciso (c) grafica la solución particular hallada en el inciso (*a*) y dos polinomios de la Serie de Taylor n=2 y n=3.

7. Define una función escalonada $F(x)$. Encuentra y grafica la solución de la ecuación diferencial $2y''(x) + 2y'(x) + y(x) = F(x)$, donde $F(x)$ es la función escalonada que debes de definir.

SECCIÓN XVII

1. Encuentra, si existen, los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - \cos x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3}{e^{2x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x - x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x}$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos x}{e^x - 1}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x - 2x^2}{x^4}$

2. Define f como una función en el intervalo $(0, a)$ y $g(y) = f(1/y)$ para $y \in (a^{-1}, \infty)$; $a^{-1} = 0$ si $a = \infty$. Demuestra que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ existe sí y sólo sí $\lim\limits_{y\to\infty} g(y)$ existe, en cuyo caso son iguales.

3. Encuentra los límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$

(b) $\lim\limits_{y\to 0^+} \left(1+\dfrac{2}{y}\right)^y$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$

4. Sea f derivable en $(c,\ \infty)$ y supón que $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)+f'(x)\right]=L$.

   Prueba que $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

   Considera: $f(x)=\dfrac{f(x)e^{x}}{e^{x}}$.

5. Es importante que $g'(x)\neq 0$ para x "cerca" de s. En una aplicación descuidada de la regla de L´Hôpital en la cual el cero de g' "cancela" los ceros de f', se puede obtener un resultado erróneo. Para $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + \cos x \operatorname{sen} x$ y $g(x)=e^{\operatorname{sen} x}(x + \cos x \operatorname{sen} x)$.

   (a) Demuestra que $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=+\infty$

   (b) Demuestra que

   $$f'(x)=2(\cos x)^2 \text{ y } g'(x)=\left[e^{\operatorname{sen} x}\cos x\right]\left[2\cos x+f(x)\right]$$

   (c) Demuestra que

   $$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2e^{-\operatorname{sen} x}\cos x}{2\cos x+f(x)} \text{ si } \cos x\neq 0 \text{ y } x>3$$

   (d) Demuestra que

   $$\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{-\operatorname{sen} x}\cos x}{2\cos x+f(x)}=0 \text{ aunque el } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \text{ no existe.}$$

SECCIÓN XVIII

1. Explica en qué consisten los principios de Inducción y del Buen Orden. Demuestra que son equivalentes.

2. Demuestra que si $y_0 \neq 0$, & $\left|y - y_0\right| < mín\left(\left|y_0\right|/2, \varepsilon\, y_0{}^2 / 2\right)$, entonces

   (a) $y \neq 0$

   (b) $\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \varepsilon$

3. Da tres distintas definiciones de función. Correspondientes con tres épocas históricas distintas. Documenta y explicita en la medida de lo posible, tus afirmaciones y ejemplifícalas.

4. Sea E subconjunto no vacío de un conjunto ordenado, supón que α es una cota inferior de E y β una cota superior de E. Demuestra que $\alpha \leq \beta$

5. Enseguida aparece un teorema, demuéstralo en lo general y explícalo a la luz del ejemplo siguiente: Sea P la proposición: "Sea f una función derivable en x_0" y Q la proposición: "f es continua en x_0". Establece la proposición p entonces q, su conversa y su contrapositiva. ¿Cuál de ellas es cierta y cuál falsa? ¿por qué?

   Teorema Demuestra que para las proposiciones P y Q

   (a) La forma proposicional $P \Rightarrow Q$ es equivalente a su contrapositiva $\sim Q \Rightarrow \sim P$

   (b) La forma proposicional $P \Rightarrow Q$ no es equivalente a su conversa $Q \Rightarrow P$

6. Demuestra que la función $f(x)$ definida como 0 si x es irracional y como x si x es irracional, es continua en $x = 0$ y discontinua en todos los reales distintos de cero. Usa el siguiente ejemplo en tu demostración.

Ejemplo. Sea *f* una función cuyo dominio son los números reales. Encuentra una denegación de la definición de "*f* es continua en *a*". Utiliza a los reales como el universo. Una traducción de la definición es la siguiente:

$$(\forall\varepsilon)(\varepsilon) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists\delta)\Big[\delta > 0 \wedge (\forall x)\Big(|x-a| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon\Big)\Big]\ )$$

Una denegación sería

$$(\exists\varepsilon)(\varepsilon > 0 \wedge (\forall\delta)(\delta > 0 >\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists x)\Big(|x-a| < \delta \wedge \big|f(x) - f(a)\big| \geq \varepsilon\Big)\ \Big]\Big)$$

En palabras la denegación dice "existe un positivo ε tal que, para todo positivo δ, existe x tal que $|x - a| < \delta$, pero $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$".

7. Demuestra que el conjunto de los números pares positivos es numerable.

números enteros $a_0, a_1, \ldots, a_n$, no todos cero tales que $\sum_{i=0}^{n} a_i z^i = 0$.

Demuestra que el conjunto de algebraicos es numerable.

9. Demuestra que si p es primo y n es natural, entonces $\sqrt[n]{p}$ es irracional.

10. Dados algunos conjuntos de puntos en el plano $\mathbb{R}^2$ completa la tabla que aparece enseguida.

Conjunto	Abierto	Cerrado	Perfecto	Acotado
$\{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z\rvert < 1\}$	Si			

$\{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z\rvert \leq 1\}$				
Un conjunto finito				
Los enteros			No	
$\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$				
$\mathbb{C}$				
(a, b)				

11. Construye un conjunto con tres puntos límites.

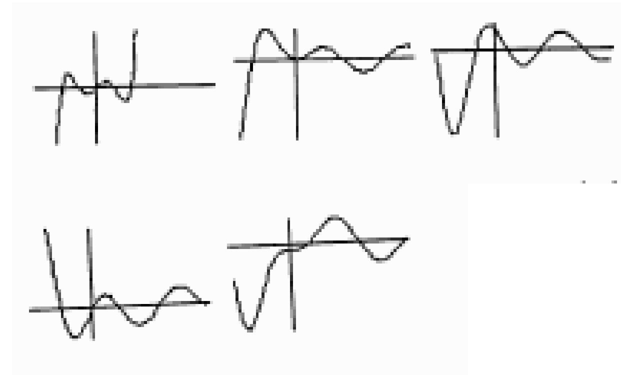
12. Construye dos denegaciones de la afirmación: "q es algebraico".

SECCIÓN XIX

1. Construye un bosquejo de la gráfica de la función que está dada por la fórmula:

$$f(x) = \frac{\left(x^2 - 1\right)\operatorname{sen} x}{x^2 - 3x + 2}$$

2. Enseguida aparecen los bosquejos de cinco gráficas de otras tantas funciones. Sólo cuatro de ellas se encuentran vinculadas analíticamente, decide cuáles son y qué relación guardan. Justifica tus consideraciones.



3. Empleando el arreglo geométrico de L´Hôpital para la función $y = f(x)$, muestra que:

$$f(x + dx) = y - 3dy + 3d^2y + d^3y$$

4. Deduce la serie de Taylor según el procedimiento empleado por Joseph-Louis Lagrange en su *Thèorie des fonctions analytiques.*

5. Demuestra que el logaritmo se hace infinito con un orden más bajo de magnitud que cualquier potencia positiva de x. Sugerencia, estudia el cociente $\frac{\log x}{x^a}$ para $\alpha > 0$ cuando $x \to \infty$.

SECCIÓN XX

1. Para cada uno de los siguientes bosquejos de gráficas construye argumentos que apoyen o refuten, según sea el caso, la afirmación siguiente:

   "el siguiente bosquejo puede representar a la gráfica de una cierta función polinomial"

2. El mismo problema para la frase:

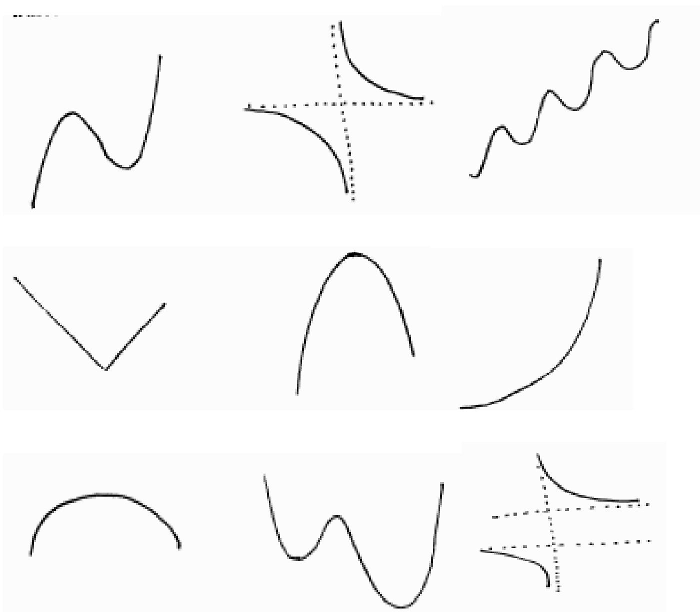
"el siguiente bosquejo puede representar a la gráfica de una cierta función racional".

3. El mismo problema para la frase:

   "el siguiente bosquejo puede representar a la gráfica de una cierta función irracional".

4. El mismo problema para la frase:

   "el siguiente bosquejo puede representar a la gráfica de una cierta función trascendente"



5. Encuentra la fórmula de la "diferencial" de un cociente según:

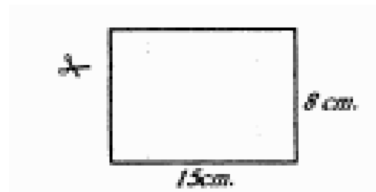
   (a) La teoría de momentos de Isaac Newton

(b) La teoría de diferencias de Gotfried Leibniz

(c) Los diferenciales de Leohnard Euler

6. Deduce “a la Euler” usando infinitos e infinitésimos, la expresión en serie de potencias del seno.

7. De una hoja de estaño de 8 por 15 cm. se hace un cenicero recortando cuadros de igual tamaño en cada una de las esquinas y doblando las cejas para formar los lados.



(a) Encuentra una fórmula para el volumen del cenicero

(b) Establece una igualdad para expresar las restricciones físicas de la variable independiente que elijas

(c) Usando la regla de Fermat para resolver los problemas de máximos y mínimos, encuentra las dimensiones del cenicero de volumen máximo.

SECCIÓN XXI

1. Encuentra la extensión de la curva definida por $X(t) = (t - \text{sen}t, 1 - \cos t)$ entre

(a) $t = 0$ *y* $t = 2\pi$, (b) $t = 0$ y $t = \pi/2$

2. Encuentra el coseno de el ángulo entre las superficies

$x^2 + y^2 + z^2 = 3$ y $x - z^2 - y^2 = -3$

en el punto (-1, 1, -1) (Este es el ángulo entre los vectores normales en el punto)

3. Demuestra que $f(x, y, z) = z - e^x \operatorname{sen} y$, y $P = (\log 3, 3\pi/2, -3)$. Encuentra:

(a) la derivada direccional de f en P en la dirección de (1, 2, 2)

(b) los valores máximos y mínimos para la derivada direccional de f en P

4. Encuentra la función potencial para un campo de fuerza $F(X)$ que es proporcionalmente inverso a la distancia de un punto X al origen y está en dirección a X.

5. Encuentra la integral del campo vectorial $F(x, y) = (xy, x)$ a lo largo de la parábola $x = 2y^2$ del punto (2, -1) al punto (8, 2).

6. Encuentra el límite de la integral de a. Este límite es interpretado como la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy$$

7. Supón que la función f satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

en una región A la cual es el interior de una curva C, orientada en sentido opuesto a las manecillas del reloj. Demuestra que

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial y}dy-\frac{\partial f}{\partial x}dx=0$$

8. Sea $F(x, y) = (y, -x)$. Sea C el círculo del radio 1 orientado en sentido opuesto a las manecillas del reloj. Demuestra que: $\int_C \vec{F} \cdot \hat{n} dx = 0$.

9. Sea F un plano definido por $F(x, y) = (x/3, y/4)$. ¿Cuál es la imagen de F en la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$?

10. La identidad del plano de $\mathbb{R}^2$ es igual a la traslación de T_A de un vector A. ¿Verdadero o falso? Si es verdadero qué vector es A?

11. Sea $y = \varphi(x)$ una función implícita que satisfaga $f(x, \varphi(x)) = 0$, ambas de C^1. Demuestra que $\varphi'(x) = \frac{D_1 f(x, \varphi(x))}{D_2 f(x, \varphi(x))}$ donde se tiene $D_2 f(x, \varphi(x)) \neq 0$.

12. Encuentra la expresión de $\varphi''(x)$ para diferenciar a $\varphi'(x)$.

13. Sea $(x, y) = G(u, v)$. Supongamos que $G: U \to \mathbb{R}^2$, y que F es un campo vectorial en $G(U)$. Así $F \circ G$ es un campo vectorial en U. Sea C una curva en U. Demuestra que

$$\int_{G \circ C} F = \int_C (F \circ G) \cdot \frac{\partial G}{\partial u} du + (F \circ G) \cdot \frac{\partial G}{\partial u} dv$$

Sea $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ y aplica la definición.

14. (a) Sea $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el mapeo en el cual se envían coordenadas esféricas (θ, φ, ρ) dentro de coordenadas cilíndricas (θ, r, z). Escribe la matriz jacobiana para este mapeo y su determinante.

(b) Escribe la fórmula de cambio de variable para este caso.

15. Si f es periódica del periodo 2π, y a, b son números, demuestra que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)dx = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)dx$$

Sugerencia: Cambia las variables, $u = x - 2\pi$, $du = dx$. Prueba que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)dx$$

16. Sea f una función uniforme $f(x) = f(-x)$ para toda x. Supón que f es periódica de 2π. Demuestra que todos los coeficientes de Fourier con respecto a sennx son 0. Sea g una función impar $g(-x) = -g(x)$. Demuestra que todos los coeficientes de Fourier con respecto a cosnx son 0.

SECCIÓN XXII

17. Si $z_2 \neq -z_3$, prueba que:

$$\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right| \leq \frac{|z_1|}{\left||z_2|-|z_3|\right|}$$

18. Suponiendo que $p > 0$ y $p \neq 1$, prueba que el lugar geométrico de los puntos z para los cuales:

$\left|\frac{1-z}{1+z}\right| = p$ es un círculo. ¿Cuál es el lugar geométrico para $p = 1$?

19. Calcula $(2 + i)(3 + i)$ y prueba que $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$

20. Si los coeficientes de $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_n = 0$ son positivos, r y R denotan respectivamente, al mínimo y al máximo de las razones

$$\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

entonces la ecuación no tiene raíces fuera de la región anular $r \leq |z| \leq R$

21. Si a, b y h denotan constantes positivas y t representa el tiempo, las ecuaciones:

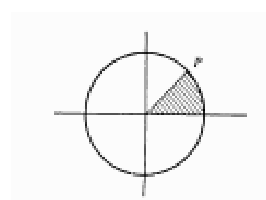
(a) $z_1 = (a-b)e^{it}$

(b) $z_2 = h \exp[-i(a-b)t/b]$

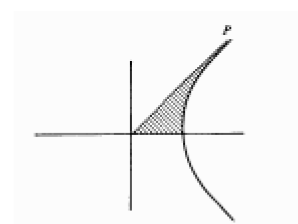
(c) $z = (a-b)e^{it} + h \exp[-1(a-b)t/b]$

representan tres puntos en movimiento. ¿Qué clase de movimiento se tiene y a lo largo de qué curva?

22. Sea t una variable real. Compara las dos funciones complejas de t; $z = \cos t + i \operatorname{sen} t$, $z = \cosh t + i \operatorname{senh} t$. Prueba que la primera ecuación representa el movimiento alrededor del círculo (unitario), mientrás que la segunda representa el movimiento de un hipérbola (equilátera); ve las partes siguientes de la figura.



$z = \cos t + i \operatorname{sen} t$



$z = \operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t$

23. (Continuación) Compara las áreas sombreadas I y II de la figura anterior. Ambas áreas están delimitadas del mismo modo: por un arco de la curva cuyo punto extremo corresponde al valor general que tiene t y cuyo punto inicial corresponde al valor particular t = 0, del parámetro, y por dos rectas trazadas a estos dos puntos desde el origen. Calcular ambas áreas. [La expresión general para tales áreas "sectoriales" es

$$\frac{1}{2}\int_0^t \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \right) dt \,]$$

24. Para valores reales de x, existe una asombrosa analogía entre el par de funciones cos$x$, sen$x$ y el par cosh$x$, senh$x$, pero no existe una relación "directa". Sin embargo, para valores complejos de la variable, sí existe una relación directa. Prueba las siguientes desigualdades:

   (a) $\cosh z = \cos iz$ (b) $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen} iz$

   (c) $\cos z = \cos x \cosh(-y) i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$ (d) $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$

   (e) $|\cosh z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y$

25. Si $w = f(z)$ es analítica, prueba que las curvas $u(x, y)$ = constante y $v(x, y)$ = constante se intersecan ortogonalmente siempre que se tenga $f'(z) \neq 0$ en el punto de intersección.

26. Tomando el campo vectorial $\overline{w} = 1/\overline{z}$ primero como un campo de velocidades de un fluido y después como un campo de fuerza, calcula el gasto a través de un círculo de radio r con centro en el origen y calcular el trabajo hecho por el campo en este círculo.

27. Prueba que $f(z) = u + iv$, función analítica en la región R, es idénticamente igual a una constate en R si se satisface cualquiera de las siguientes proposiciones:

   (a) $u = 0$ (b) $v = 0$

(c) $|f(z)|$ = es constante (d) $\overline{f(z)}$ es derivable.

28. En una transformación conforme $w = f(z)$, prueba que la amplificación lineal en z es $|f'(z)|$ es decir, un elemento de arco ds en el plano z se multiplica por $|f'(z)|$ en el plano w; prueba también que el área o amplificación de superficie es $|f'(z)|$. Prueba entonces que cualquier región D del plano z se transforma sobre una región del plano w cuya área es:

$$A = \int_D \int \left|f'(z)\right|^2 dxdy$$

29. Evalúa $\int_{-1}^{1} z^{1/2} dz$ tomándola alrededor del semicírculo superior, en donde $z^{1/2}$ tiene su valor principal. (S).

30. Prueba que $\int_{-1}^{1} \frac{dz}{z}$ tiene el mismo valor para cualquier trayectoria que una -1 y 1, y que esté completamente contenida en el semiplano superior.

31. Si $f(z)$ es entera y $M(r) = máx_{|z|=r} \left|f(z)\right|$ probar que $M(r)$ es monótona creciente cuando se incrementa a r.

32. Si $f(z)$ analítica en $|z| < R$ y $f(0) = 0$. Prueba que existe un número $R_1 < R$ para el cual $f(z) \neq 0$ en $R < \left|z\right| < R_1$.

33. Si $f(z)$ analítica en $|z| < R$, y $f(z) = 0$ en $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$ en donde $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, probar que $f(z) \equiv 0$.

34. Sea $f(z)$ analítica en $|z| < 1$, continua en $|z| \leq 1$, $|f(z)| \leq 1$ en esta región, y $f(0) = 0$. Prueba que $|f(z)| \leq |z|$ en $|z| \leq 1$. Este es el lema de Schwarz.

Preguntas sobre Álgebra Lineal

1) ¿Existe alguna TL (transformación lineal) que mapee los vectores de la Figura 1 al vector de la Figura 2? En general, ¿qué condiciones deben cumplir 3 vectores en el plano para que exista una TL que los mapee al mismo vector?

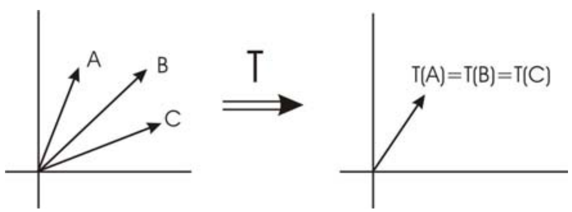


Figura 1. **Figura 2.**

2) Da ejemplos de transformaciones no lineales. ¿Qué significa "lineal" en la expresión "Transformación lineal"?
3) ¿Existe alguna TL que mapee los vectores , de la Figura 1 a los vectores y de la Figura 2? Justifica tu respuesta.

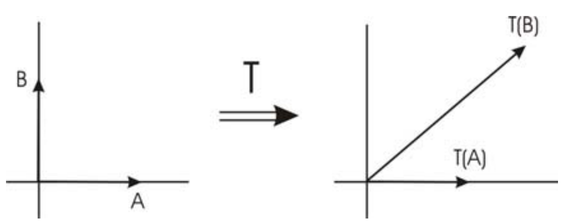


Figura 1. **Figura 2.**

4) Sea T : ♥^{2} ÷ ♥^{2} una TL. Supongamos que (v_1, v_2) es una base para ♥^{2} . Sea $T(v_1)=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $T(v_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Halla los siguientes valores o expresiones:

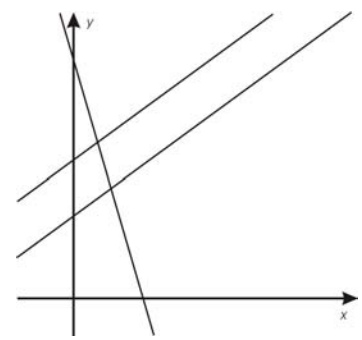
a) $T(v_1+v_2)$

b) $T(2v_1)$

c) $T(0.8v_1\text{-}1.2\, v_2)$

d) $T(v)$ donde $v = v_1+3v_2$

5) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones representado por la siguiente figura? Escribe algebraicamente un sistema de ecuaciones que puede corresponderle. Justifica tu respuesta.



6) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x+y=2$$
$$x\text{-}y=1$$

$$-6x-2y=k$$

a) ¿Es posible que este sistema tenga una solución única?

Si la respuesta es "Sí":

i. ¿Cuál es la solución?
ii. Grafica este sistema y muestra la solución geométricamente.

Si la respuesta es "No", justifica tu respuesta.

b) ¿Es posible que este sistema tenga infinidad de soluciones?

Si la respuesta es "Sí":

i. ¿Cuál es el conjunto solución?
ii. Grafica este sistema y muestra la solución geométricamente

Si la respuesta es "No", justifica tu respuesta.

7) Un estudiante resuelve el siguiente sistema siguiendo los pasos que se dan a continuación:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y=4 \\ -6x-2y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} 6x+2y=8 \\ -6x-2y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=11$$

(Multiplicando la primera ecuación por 2) (Sumando las ecuaciones) y concluye que el sistema no tiene solución. Sin embargo no sabe cómo interpretar la igualdad 0=11. ¿Cómo le explicarías el significado de esta igualdad falsa?

8) Da fórmulas de por lo menos dos transformaciones lineales que mapeen los vectores A y B de la Figura 1 en los vectores $T(A)$ y $T(B)$ de la Figura 2.

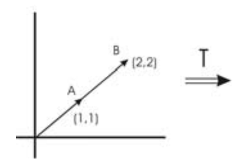


Figura 1.

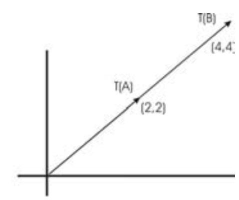


Figura 2.

9) Sea $H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : y \geq x^2 \right\}$ ¿Es H un subespacio de ♥^{2}? Justifica tu respuesta.

10) Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $w = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

¿w pertenece al espacio generado por el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$?