CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Área de Tecnologías Digitales en Educación Matemática

Examen de Admisión 2018

GUÍA DE ESTUDIO

Selección de problemas y ejercicios con soluciones

Álgebra
Geometría y Trigonometría
Geometría Analítica
Cálculo

@contacto: **smartin@cinvestav.mx**

CONTENIDO

PROBLEMARIO

I. Aritmética y Álgebra

A1. El gobierno asignó a un vivero la tarea de sembrar una cantidad de árboles en un determinado número de días. Si el personal del vivero siembra 480 árboles cada tercer día (un día sí y un día no) durante el período designado, entonces les faltará sembrar 160 árboles. En cambio, si siembran 280 árboles diarios sembrarán 200 árboles más que los solicitados. ¿Cuál es el número de árboles que deben sembrar y en qué número de días? [Sugerencia: considera que las soluciones deben ser enteras.]

A2. Se pretende que en un tubo de ensaye coexistan tres especies de bacterias alimentadas por tres tipos de nutrientes. Una bacteria de la primera especie consume diariamente una unidad de cada nutriente; una bacteria de la segunda especie consume diariamente una unidad del primer nutriente, dos del segundo y tres del tercero; y una bacteria de la tercera especie consume una unidad del primer nutriente, tres del segundo y cinco del tercero. Si se abastece el tubo diariamente con 15,000 unidades del primer nutriente, 30,000 del segundo y 45,000 del tercero ¿cuáles son las poblaciones de cada especie que pueden coexistir en ese ambiente?

A3. Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Un fotógrafo tomaba fotos de cada saludo y advirtió que los apretones de mano fueron 66 ¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?

A4. La suma de la edad de un hijo y la de su madre es la del padre y la suma de la de los tres da 64; pero la edad del hijo es la cuarta parte de la edad del padre menos la quinta parte de la de su madre. ¿Qué edad tiene cada uno?

A5. Las dinámicas poblacionales de muchos peces se caracterizan por porcentajes de fertilidad extremadamente altos entre adultos y porcentajes de supervivencia muy bajos entre los jóvenes. Un lenguado maduro puede poner hasta 2.5 millones de huevos, pero sólo 0.00035 % de la prole sobrevive a la edad de 3 años. Use notación científica para aproximar el número de descendientes que viven hasta la edad de 3 años.

A6. Considera el polinomio siguiente:

$$P(x) = 3x^{19} - 5x^{17} + 8x^{15} - 6x^{13} + 18x^{11} - 13x^9 - x^7 - 2x^5 - x^3 - 1$$

¿Este polinomio es divisible por $(x-1)$? ¿Por qué?

A7. Dos de las raíces del polinomio $P(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - x^2 - x + 6$ son:

$$r_1 = 1 \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

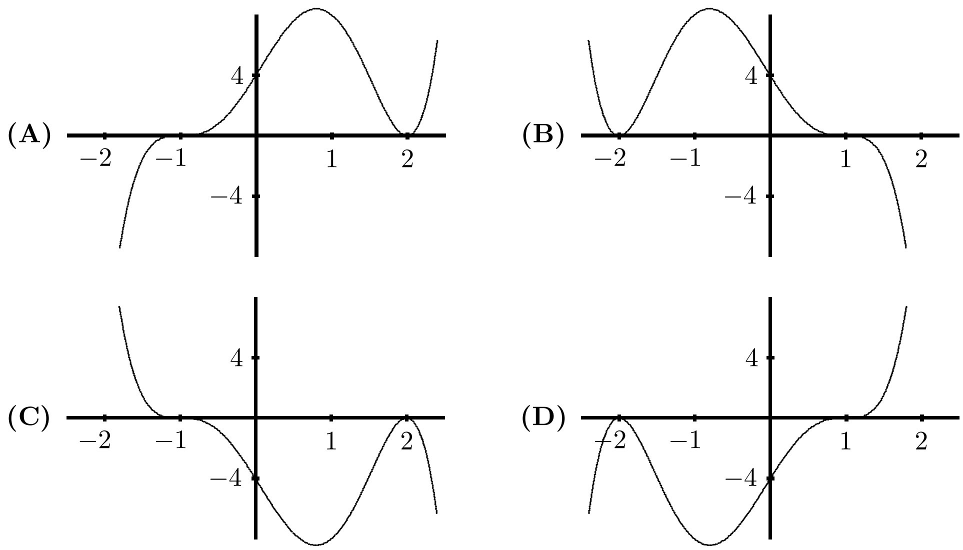
Determine las demás raíces y la factorización del polinomio en factores lineales o cuadráticos con coeficientes reales.

A8. Si -4 es raíz del polinomio $P(x) = 2x^3 + 6x^2 + 7x + 60$, encontrar las otras raíces.

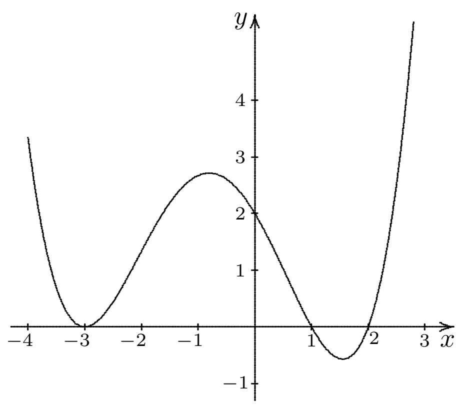
A9. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la del polinomio:

$$P(x) = (x-1)^3(x+2)^2 \text{ ?}$$

Justifica tu respuesta.



A10. La siguiente gráfica corresponde a un polinomio con coeficientes reales de cuarto grado. Determine su expresión algebraica.



A11. Encontrar el polinomio $P(x)$ de grado cuatro con coeficientes reales que cumple las condiciones siguientes:

a) Dos de sus raíces son: $r_1 = 2 - i$ y $r_2 = 3$.

b) $P(0) = 15$ y $P(4) = -1$.

A12. Sea $P(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$. Determine para qué valores reales de x se cumple que:

a) $P(x) > 0$

b) $P(x) < 0$

A13. $P(x)$ es un polinomio que cumple con las siguientes características:

i) Tiene solamente dos raíces reales: 1 y -1 . La primera, 1, es una raíz múltiple de orden par y la segunda, -1, es una raíz múltiple de orden impar.

ii) El número complejo $-i$ es una raíz de $P(x)$.

Determina el grado del polinomio $P(x)$ y haz un boceto de su gráfica. Justifica tus respuestas.

A14. Encuentre la familia de polinomios cúbicos que pasen por los puntos:

$$(-1, 5), \quad (2, -3) \quad \text{y} \quad (3, -3)$$

A15. Si $x : y = 2 : 3$, encuentra la razón de $(7x - 4y) : (3x + y)$.

A16. Encuentra cuatro números pares consecutivos cuya suma de 196.

A17. Calcula la suma de los términos vigésimo al septuagésimo de la progresión aritmética cuyo n-ésimo término es $\frac{n}{a} + b$.

A18. ¿De cuantas maneras se pueden ordenar las vocales?

A19. ¿Para qué valores de m las raíces de la ecuación:

$$\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m-1}{m+1}$$

serán iguales en magnitud pero de signos contrarios?

A20. Resuelva las siguientes desigualdades:

a) $\sqrt{3x+1} \leq 1 - 3x$ *b*) $4x - 12 \leq \sqrt{5x-4}$ *c*) $\sqrt{2x+1} \leq x - 1$

d) $\dfrac{x+3}{x^2-25} > 0$ *e*) $|x^2 - 4| \leq 3$

A21. ¿Para cuáles valores de a se satisface el sistema de desigualdades:

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

cualesquiera que sean los valores de x?

A22. Si a, b y c son números reales, con $0 < c < 1$ y $1 < a < b$, ordene los siguientes números:

$$a, \quad b, \quad c, \quad \frac{a+b}{2}, \quad \sqrt{ab}, \quad \sqrt{c} \quad \text{y} \quad c^2$$

A23. Pruebe que:

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{y} \qquad \omega^2$$

son raíces cúbicas de la unidad.

A24. Determinar todas las raíces cúbicas de $-i$.

A25. ¿Bajo qué condiciones el módulo de la suma de dos números complejos es igual a la diferencia de los módulos de los sumandos?

A26. Determinar para qué valores de λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente tiene:

a) Solución única.
b) No tiene solución.
c) Tiene infinidad de soluciones.

$$\begin{aligned} \lambda x + \ \ y + \ \ z &= 1 \\ x + \lambda y + \ \ z &= \lambda \\ x + \ \ y + \lambda z &= \lambda^2 \end{aligned}$$

A27. Pruebe que los puntos $P(a,b,c)$ para los cuales el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & & & = & a \\ 2x & - & y & + & 7z & = & b \\ -x & + & 2y & - & 5z & = & c \end{array}$$

tiene solución, son puntos de un plano. Encuentre la ecuación de dicho plano.

A28. Elegir λ de tal manera que el siguiente sistema de ecuaciones tenga solución:

$$\begin{aligned} 2x - \ \ y + \ \ z &= 1 \\ x + 2y - \ \ z &= 2 \\ x + 7y - 4z &= \lambda \end{aligned}$$

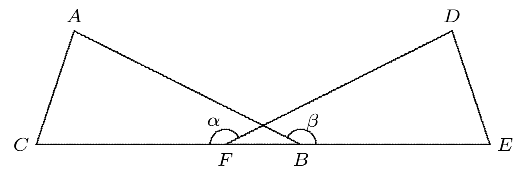
A29. ¿Cuántas cifras en una aproximación decimal para $\frac{1}{7}$ deben usarse para tener un error menor que un millonésimo en cálculos (multiplicación y división) que se hagan con esa fracción? Justifica tu respuesta.

A30. Demuestre que la expresión: $\ln\left(\frac{1}{9}\right) - \ln\left(\sqrt{27}\right)$ es igual a: $-\frac{7}{2}\ln(3)$.

II. Geometría y Trigonometría

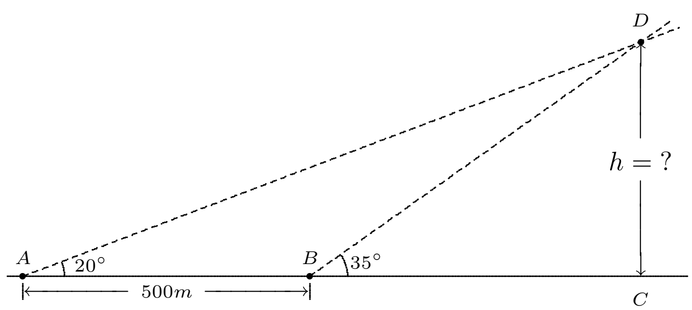
GT1. De acuerdo a la figura tenemos que:

$$\measuredangle\alpha = \measuredangle\beta$$
$$AB = DF$$
$$CF = BE$$



Prueba que: $AC = DE$.

GT2. Para calcular la altura de una montaña se miden los ángulos de elevación hacia la punta de la montaña desde dos puntos A y B separados por una distancia de 500m. Encuentra la altura de la montaña.



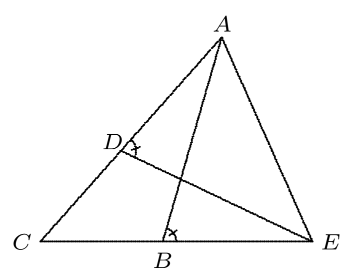
Si lo consideras conveniente, puedes utilizar algunos valores de la tabla:

	$20°$	$35°$
$\operatorname{sen} x$	0.342	0.574
$\cos x$	0.940	0.819

GT3. En la figura se tiene que:

$\measuredangle ADE = \measuredangle EBA$ y $\overline{DC} = \overline{BC}$.

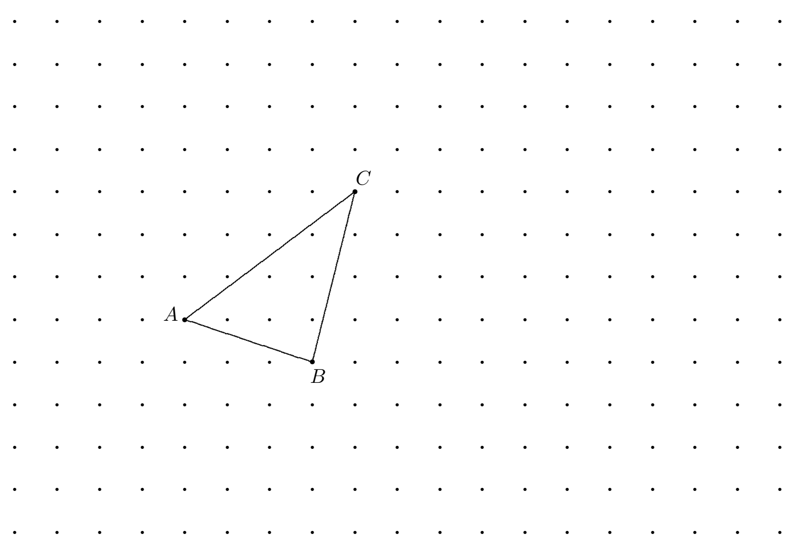
Muestra que $\overline{AB} = \overline{ED}$.



GT4. ¿Puede un triángulo tener dos ángulos rectos? Justifica tu respuesta.

GT5. Si se tiene una pirámide pentagonal inscrita en un cono recto de altura igual a 8 unidades y un ángulo de abertura de 30°, determine las dimensiones de las aristas de la pirámide, así como la longitud de una diagonal de la base.

GT6. Construye un triángulo semejante al triángulo ABC, de distinto tamaño, cuyos vértices estén sobre los puntos de la cuadrícula siguiente:



GT7. Dado un triángulo ¿es posible construir una circunferencia que pase por sus tres vértices? Explique su respuesta.

GT8. Dado un cuadrilátero ¿es posible construir una circunferencia que pase por sus cuatro vértices? Explique su respuesta.

GT9. Si $a^2 + b^2 = 1$, demuestra que: $a \operatorname{sen} x + b \cos x \leq 1$.

GT10. Para un triángulo ABC, si $\measuredangle B = 45°$, $\measuredangle C = 75°$ y la perpendicular de A sobre BC es 3 unidades, encuentre los lados de dicho triángulo.

GT11. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $3 \operatorname{sen} A = 2(\cos A)^2$

b) $\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = 1,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$.

c) $\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x = 0,\ x \in [0, 2\pi]$.

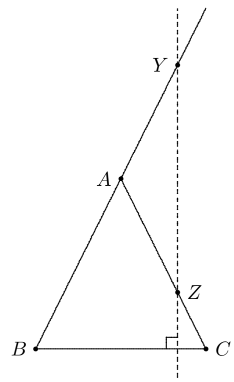
d) $\operatorname{sen} x + 1 = \cos x,\ x \in [0, 2\pi]$.

e) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1,\ -8 \leq x \leq 0$.

f) $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2$.

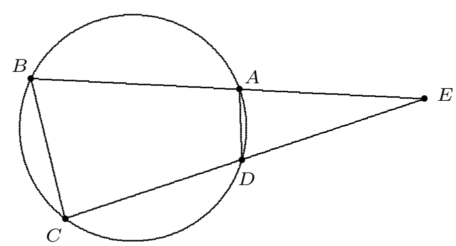
GT12. Encuentra todas las soluciones de la ecuación: $\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

GT13. El triángulo ABC, mostrado abajo, es isósceles:



Sobre la prolongación de BA se elige un punto Y; se traza la perpendicular de Y al lado BC, intersecando al lado AC en el punto Z. Pruebe que el triángulo AYZ también es isósceles.

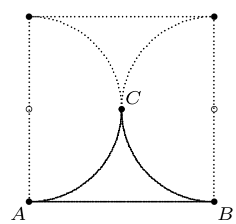
GT14. Los triángulos EBC y EAD de la figura, ¿son semejantes? Explica tu respuesta.



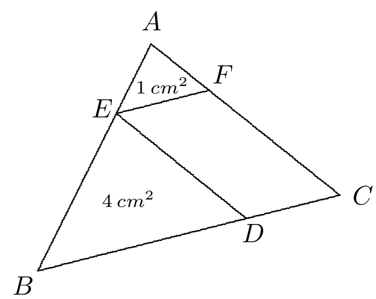
GT15. Expresa $\operatorname{sen}(3z)$ en términos de potencias de $\operatorname{sen}(z)$.

GT16. Determina el ángulo α que se forma con el semieje positivo de las abscisas y el segmento que une al origen con el punto $(-1, 2)$. Explica tu respuesta.

GT17. En la siguiente figura el lado del cuadrado mide $\sqrt{6}\,\text{cm}$, ¿cuánto mide el área ABC, limitada por el trazo grueso?



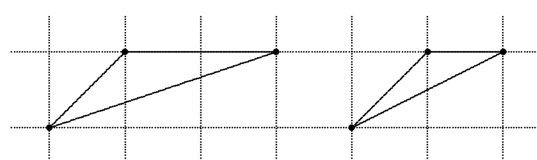
GT18. Calcula el área del paralelogramo $CDEF$ mostrado en la siguiente figura:



GT19. Demostrar que al trazar las alturas de un triángulo a partir de dos de sus vértices, dichas alturas se intersecan formando un ángulo igual al ángulo del tercer vértice (del que no se trazó altura).

GT20. Al trazar las diagonales de un paralelogramo éste se divide en cuatro triángulos. *Conjetura: los cuatro triángulos tienen la misma área.* Valida la conjetura o da un contraejemplo.

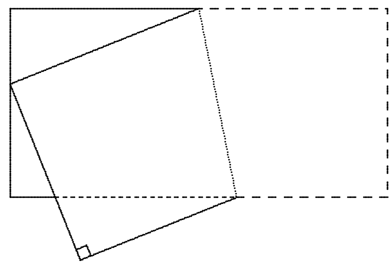
GT21. En la cuadrícula siguiente, los triángulos que aparecen, ¿son semejantes? Explica tu respuesta.



GT22. *a*) Explica qué es el centro de gravedad o baricentro de un triángulo.

b) ¿A qué altura se localiza respecto a uno de los lados del triángulo? Justifica tu respuesta.

GT23. Al doblar una hoja de papel como se indica en la figura, se determinan tres triángulos. Etiqueta sus vértices y escribe cuáles son esos triángulos. ¿Por qué son semejantes los tres triángulos?

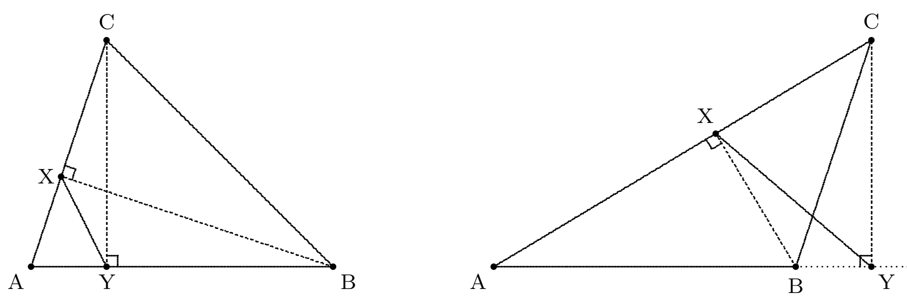


GT24. Conjetura: *Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.* ¿La conjetura es falsa o es verdadera? Argumenta tu respuesta.

GT25. Trace un triángulo rectángulo y sobre cada uno de sus lados construya triángulos equiláteros hacia fuera.

La suma de las áreas de los triángulos equiláteros sobre los catetos ¿cómo es respecto al área del triángulo equilátero sobre la hipotenusa? Justifique su respuesta.

GT26. Como se muestra en la figura, en ambos triángulos ABC, de los vértices B y C se trazan rectas perpendiculares a sus correspondientes lados opuestos, intersecándolos en los puntos X e Y, respectivamente. ¿Son semejantes los triángulos ABC y AXY? Argumenta tu respuesta.

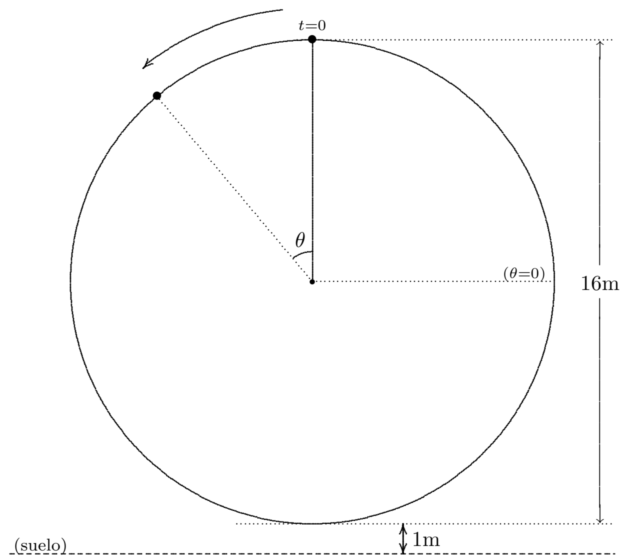


(a) (b)

GT27. Verifique la identidad: $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos(2x)} = \tan x.$

GT28. Traza un triángulo y de dos de sus vértices traza las perpendiculares al lado opuesto, etiquetemos a los pies de dichas perpendiculares con K y L. El triángulo formado por K, L y el tercer vértice, desde el cual no se trazó perpendicular alguna, ¿es semejante al triángulo inicial? Argumenta tu respuesta.

GT29. Una rueda de la fortuna tiene un diámetro de 16 metros y su parte más baja está a un metro de altura del suelo. A partir de un momento la rueda empieza a girar a una velocidad de giro uniforme de manera tal que da 3 vueltas en un minuto. Determina la altura de una canastilla de la rueda como función del tiempo, suponiendo que cuando $t = 0$ la canastilla se encuentra en la parte más alta de la rueda de la fortuna.



GT30. Construye las tangentes comunes a dos círculos ajenos. Describe los pasos de dicha construcción.

GT31. **Sin utilizar la calculadora**, sólo mediante identidades trigonométricas (indicándolas), calcular el valor exacto de:

a) $\operatorname{sen} 75°$ *b*) $\cos 15°$ *c*) $\tan 22.5°$

Si lo consideras conveniente, puedes utilizar los valores de la siguiente tabla:

	0°	30°	45°	60°	90°
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

III. Geometría Analítica

GA1. Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta: $2x - y = 3$ y que pasa por la intersección de esta última y la recta: $2y - x = 1$.

GA2. *a*) Encuentra la intersección del círculo de radio 2 cuyo centro está en el punto $(2, 0)$ y la recta con pendiente -1 y ordenada al origen 4.

b) ¿Cuál es la pendiente de una recta tangente al círculo cuando $x = 1$?

GA3. ¿Qué condición debe cumplir λ para que la ecuación: $\lambda x^2 + \lambda y^2 + 2a\lambda x + a^2 = 0$ represente una circunferencia?

GA4. *a*) Determina si los puntos $A(-4, 2)$, $B(2, 6)$, $C(2, -7)$ y $D(8, -3)$ son los vértices de un rectángulo. Justifica tu respuesta.

b) Demostrar que los puntos $A(1, 1)$, $B(5, 3)$, $C(8, 0)$ y $D(4, -2)$ son los vértices de un paralelogramo y determinar la medida de su ángulo obtuso.

GA5. El punto $P(x, y)$ dista del punto $(1, 2)$ el doble de su distancia al punto $(3, -4)$. Determine el lugar geométrico del punto P.

GA6. El punto $P(x, y)$ equidista de los puntos $(1, 2)$ y $(3, -4)$. Determina el lugar geométrico del punto P.

GA7. Dados los extremos del segmento formado por los puntos $A(2, 3)$ y $B(-2, -5)$, determine la ecuación de la recta mediatriz a este segmento.

GA8. Determina el valor de a para que las rectas: $2x + 3y = 5$ y $3x + ay = 7$ sean perpendiculares.

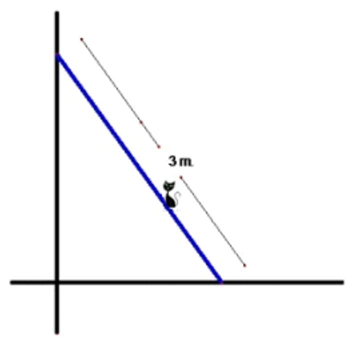
GA9. Si la pendiente de la recta que une al punto $P(x, y)$ con el punto $(4, -1)$ es $m = 5$, encuentra el lugar geométrico del punto P.

GA10. ¿Cuál es la distancia del origen de coordenadas a la recta $3x + 2y = 6$?

GA11. Hallar la ecuación de la parábola vertical que pasa por los puntos: $(0, 3)$, $(-1, 1)$ y $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

GA12. Si $A(3, -2)$, $B(3, 4)$ y $C(-1, 1)$ son los puntos medios de un triángulo, encuentre los vértices del triángulo correspondiente.

GA13. Una escalera de longitud 3 metros se encuentra recargada en una pared. Un gato está subido en un escalón que se encuentra a un metro del extremo inferior de la escalera. Si la escalera se desliza sin que se despegue de la pared ni del piso. Determina el lugar geométrico que describe la trayectoria que sigue el gato si no se mueve del escalón mencionado. (Ver la siguiente figura).



GA14. Determinar si los puntos $A(27,77)$, $B(4,7)$ y $C(-5,-20)$ están alineados o no. Justifica tu respuesta.

GA15. Dos de los vértices de un triángulo son los puntos $A(-1,3)$ y $B(5,1)$:

a) Hallar la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice C si se mueve de tal manera que la pendiente del lado AC siempre es el doble de la pendiente del lado BC.

b) Bosqueja su gráfica.

GA16. La ecuación de una circunferencia es:

$$4x^2 + 4y^2 - 16x + 20y + 25 = 0$$

Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la anterior que es tangente a la recta $5x - 12y = 1$.

GA17. Determine la ecuación de una parábola vertical que corte al eje X en $x = -7$ y $x = 3$. Además, encuentre el vértice de la parábola que construyó.

GA18. Determine el valor de t para que los puntos $A(-3,-5)$, $B(2,-6)$ y $C(65,t)$ estén alineados. Explique y justifique su procedimiento.

GA19. Determine la ecuación de la recta tangente en el punto $(0, 5.24)$ a la circunferencia cuyo centro se encuentra en el punto $(2, 3)$.

GA20. Determine el extremo del segmento que parte del punto $(-4, 5)$ y cuyo punto medio es $(1, -1)$.

GA21. Determine el lugar geométrico del punto que se mueve de forma tal que la suma de sus distancias a los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ sea 8.

GA22. Encuentre la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de las ordenadas de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 = 36$$

GA23. El perímetro de un triángulo es 30, y los puntos $A(0\,,5)$ y $B(0\,,-5)$ son dos de sus vértices. Encuentre el lugar geométrico del tercer vértice.

GA24. *a*) Representa algebraicamente a la familia de rectas que son perpendiculares a la recta: $17x - 13y + 9 = 0$.

b) ¿Cuál de las rectas de esta familia pasa por el punto $(-3, 1)$?

III. Cálculo

C1. Hacer un bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ determinando su dominio, sus raíces, sus puntos mínimos y máximos, los intervalos donde la función es creciente, donde es decreciente, donde es cóncava hacia abajo y donde es cóncava hacia arriba.

C2. Bosquejar la gráfica de la función f determinando su dominio, sus raíces, sus puntos máximos y mínimos, sus puntos de inflexión y los intervalos de monotonía y concavidad.

a) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2$

c) $f(x) = \frac{6x^2 - x^4}{9}$

d) $f(x) = \sqrt{3 - 2x^2 + x^4}$

C3. Calcular el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

C4. Hallar los límites que se indican:

a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^5}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^5}{e^x}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

e) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

C5. Hallar la derivada de la función:

$$f(x) = \int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3(t)\, dt$$

C6. Hallar $y'(2)$ si

$$y(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

C7. Derivar la funciones:

a) $f(x) = x^x, \quad x > 0$ *b*) $g(t) = \big(\ln(t^2+1)\big)^2$ *c*) $h(t) = (t+1)^t$

C8. Derivar las funciones que se indican:

a) $P(t) = \left(t^3 - \dfrac{1}{t^3} + 3\right)^4$

b) $Q(x) = \left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)^5$

c) $R(v) = \dfrac{v^5}{v^3-2}$

d) $S(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad x \neq 1$

e) $T(x) = \dfrac{x^5}{1+x^2}$

f) $U(t) = (1-\cos t^2)^4$

g) $V(x) = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{1-x^3}$

C9. Resuelva las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int x\sec^2(x^2)dx$

b) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 x^5e^{-x^2}dx$

d) $\displaystyle\int x[1+\tan^2(x^2)]\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x\cos x\,dx$

f) $\displaystyle\int_1^2 -\frac{dx}{x^2}$

g) $\displaystyle\int x\sec\left(x^2\right)\operatorname{tg}\left(x^2\right)dx$

h) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{-x^2}dx$

i) $\displaystyle\int \frac{1-t}{t+1}\,dt$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{-x}+1}$

k) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\operatorname{sen} x dx$

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$

m) $\displaystyle\int_0^{\pi} 2\operatorname{sen}^2 x dx$

n) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

ñ) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+5}$

o) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

p) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x\sec^2(x^2)\tan(x^2)\,dx$

C10. La ecuación del movimiento de un punto en el eje X es:

$$x = 100 + 0.05t - 0.01t^3$$

Hallar la velocidad y aceleración de dicho punto para los instantes: $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ y $t_2 = 10$. ¿En algún momento se detiene este punto? Justifica tu respuesta.

C11. El valor promedio de una función en un intervalo $[a,b]$ es:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

a) Encuentre el valor promedio de $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0,1]$.

b) Utilice el patrón inferido del inciso anterior para determinar el valor medio de $f(x) = x^n$, para cualquier natural $n \geq 1$. Ilustre con un ejemplo gráfico este resultado.

C12. Suponga una función f que cumpla con:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? ¿cuáles podrían ser verdaderas? [o falsas, es decir, no se sabe] y ¿cuáles son falsas?

a) $f'(2) = 2$

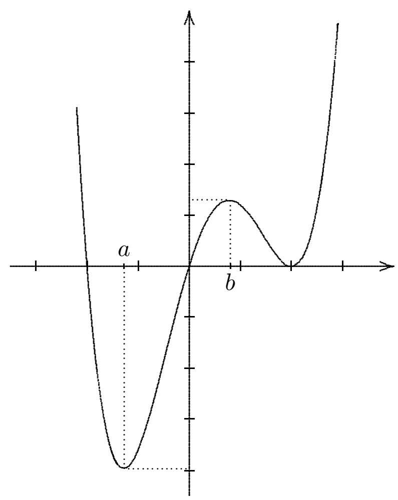
b) $f'(2) = 0$

c) $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

d) $f(x)$ es continua en $x = 0$

e) $f(x)$ es continua en $x = 2$

C13. La siguiente gráfica corresponde a la función $f'(x)$:



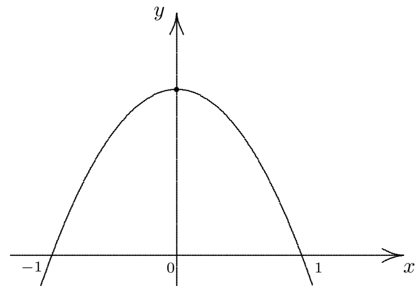
Si $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Para que valores de x en el intervalo abierto $(-3, 3)$ f tiene un máximo relativo? ¿un mínimo relativo? Justifica.

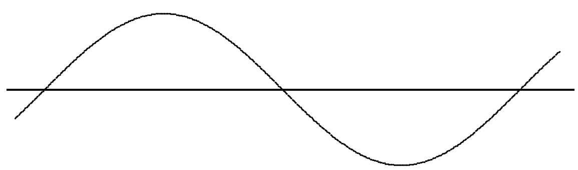
b) ¿Para qué valores de x es la gráfica de f cóncava hacia arriba?

c) Si se sabe que $f(-2) = 0$, usa este hecho para trazar una posible gráfica de f.

C14. *a*) La siguiente gráfica corresponde a $f'(x)$. Si sabemos que $f(0) = 0$, esboce la gráfica de $f(x)$ señalando máximos, mínimos e intervalos de monotonía y concavidad.



b) La siguiente gráfica corresponde a $f'(x)$. Bosqueje la gráfica de una posible función $f(x)$.



C15. Por el eje X se mueven dos puntos que tienen respectivamente las leyes de movimiento:

$$x = 24 + t \qquad \text{y} \qquad x = \frac{1}{2}t^2$$

con $t \geq 0$. ¿Con qué rapidez se alejarán estos puntos, el uno del otro, en el instante de su encuentro? (x se da en metros, t en segundos)

C16. Los costos fijos de una imprenta son de 10 mil dólares anuales. El costo de imprimir cierto libro es de 8 dólares por ejemplar y la capacidad máxima de la imprenta corresponde a un tiraje de 10 mil ejemplares. Si x es la cantidad de ejemplares demandada de este libro, el precio en función de x es

$$p(x) = 20 - \frac{x}{1000}$$

¿Cuántas copias deben imprimirse y cuál debe ser el precio de venta para maximizar la utilidad anual generada por la producción y venta de este libro?

C17. Mostrar que

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \arctan(x + 2) + C$$

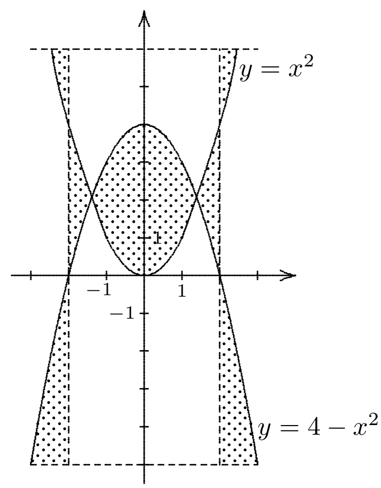
C18. Para la curva:

$$y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$$

a) Hallar las ecuaciones de la tangente y la normal en $(-2, 5)$.

b) Hacer un bosquejo de la gráfica (hay que mostrar los puntos claves: máximos, mínimos y puntos de inflexión, intervalos de concavidad, etc.).

C19. Calcular el área sombreada de la siguiente gráfica:



C20. Calcular el área del segmento de la parábola $y = x^2$ cortado por la recta $y = -2x + 3$. (Hacer un bosquejo del área limitada dándole valores a las intersecciones).

C21. Si en $x = 1$ el polinomio $P(x)$ tiene una raíz múltiple y sabemos que:

$$P''(x) = 20x^3 - 12x + 4$$

determinar la expresión algebraica de $P(x)$.

C22. Hay que hacer una superficie rectangular cercada por tres de sus lados con tela metálica y lindante por el cuarto con una larga pared de piedra. ¿Qué forma será más conveniente dar a la superficie (para que su área sea mayor), si se dispone en total de ℓ metros lineales de tela metálica?

C23. Demostrar que de todos los triángulos isósceles de perímetro $P > 0$ dado, el equilátero es el de mayor área.

C24. Demostrar que las parábolas: $y = x^2$ y $y = \frac{1}{2} - x^2$ se cortan entre sí formando un ángulo recto.

C25. ¿Qué ángulos forman con el eje de las abscisas, al cortarse con éste en el origen las sinusoides:

a) $y = \operatorname{sen} x$ *b*) $y = \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$

C26. Demuestre que las gráficas de $f(x) = 1 + x^2$ y $g(x) = \frac{3}{2} - x^2$ hacen un ángulo recto al cortarse.

C27. De todos los cilindros circulares rectos que tienen un volumen V_0 dado, determinar el de menor superficie: ¿cuál es la relación entre el diámetro de la base y la altura de tal cilindro?

C28. La velocidad de un cuerpo, lanzado hacia arriba verticalmente con una velocidad inicial v_0, despreciando la resistencia del aire, se expresa por la fórmula:

$$v = v_0 - g\,t$$

donde t es el tiempo transcurrido y $g = 9.81\,{}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{seg}^2}$ es la aceleración de la gravedad.

a) ¿En qué posición, con respecto a la posición inicial (como origen), se encontrará este cuerpo a los t segundos de haberlo lanzado?

b) Si $v_0 = 9.81\,{}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{seg}}$ ¿cuál es la altura máxima que alcanza el cuerpo, con respecto a la posición inicial?

Soluciones a los ejercicios impares

I. Aritmética y Álgebra

A1. *El gobierno asignó a un vivero la tarea de sembrar una cantidad de árboles en un determinado número de días. Si el personal del vivero siembra 480 árboles cada tercer día (un día sí y un día no) durante el período designado, entonces les faltará sembrar 160 árboles. En cambio, si siembran 280 árboles diarios sembrarán 200 árboles más que los solicitados. ¿Cuál es el número de árboles que deben sembrar y en qué número de días?* *[Sugerencia: considera que las soluciones deben ser enteras.]*

Solución:

a) Número par de días.

Sea $2n$ el número de días determinado (n entero) y sea x la cantidad de árboles solicitados. Si siembran un día sí y un día no, tenemos n días efectivos de siembra:

$$\overbrace{\underset{1}{\text{sí}}\quad\underset{2}{\text{no}}}^{1}\quad\overbrace{\underset{3}{\text{sí}}\quad\underset{4}{\text{no}}}^{2}\quad\overbrace{\underset{5}{\text{sí}}\quad\underset{6}{\text{no}}}^{3}\qquad\cdots\qquad\overbrace{\underset{2n-1}{\text{sí}}\quad\underset{2n}{\text{no}}}^{n}$$

De acuerdo a los datos, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} 480\cdot n &= x-160 &\quad\rightarrow\quad& x = 480n+160 \\ 280\cdot 2n &= x+200 &\quad\rightarrow\quad& x = 560n-200 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$480n+160 = 560n-200 \;\rightarrow\; 560n-480n = 160+200 \;\rightarrow\; 80n = 360$$

$$\therefore\quad n = \tfrac{360}{80} = \tfrac{36}{8} = \tfrac{9}{2} = 4.5$$

lo cual contradice el hecho de que n sea entero. Así, dado que en este caso se obtiene una solución inconsistente, no hay solución bajo la hipótesis de que el número total de días sea par.

b) Número impar de días.

Sea ahora $2n+1$ el número de días determinado (n entero) e igualmente x la cantidad de árboles solicitados. Si siembran un día sí y un día no, tenemos $n+1$ días efectivos de siembra:

$$\overbrace{\underset{1}{\text{sí}}\quad\underset{2}{\text{no}}}^{1}\quad \overbrace{\underset{3}{\text{sí}}\quad\underset{4}{\text{no}}}^{2}\quad \overbrace{\underset{5}{\text{sí}}\quad\underset{6}{\text{no}}}^{3}\qquad \cdots \qquad \overbrace{\underset{2n-1}{\text{sí}}\quad\underset{2n}{\text{no}}}^{n}\quad \overbrace{\underset{2n+1}{\text{sí}}}^{n+1}$$

De acuerdo a los datos, tenemos entonces que:

$$480(n+1) = x - 160 \quad \rightarrow \quad x = 480n + 640 \tag{1}$$
$$280(2n+1) = x + 200 \quad \rightarrow \quad x = 560n + 80 \tag{2}$$

Por lo tanto:

$$480n + 640 = 560n + 80 \quad \rightarrow \quad (560 - 480)n = 640 - 80 \quad \rightarrow \quad 80n = 560$$

$$\therefore \quad n = \frac{560}{80} = \frac{56}{8} = 7$$

Luego, sustituyendo $n = 7$ en (1) o en (2) encontramos que la cantidad de árboles solicitados es $x = 4000$; y sustituyendo $n = 7$ en $2n+1$ obtenemos 15, que es el número de días. Así, concluimos que se deben sembrar 4000 árboles en el transcurso de 15 días.

A3. *Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Un fotógrafo tomaba fotos de cada saludo y advirtió que los apretones de mano fueron 66 ¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?*

SOLUCIÓN: Vamos a plantear tres maneras diferentes con las que es posible resolver este problema: sumando, utilizando combinatoria o con Geometría. Para empezar, supongamos que a la reunión asistieron $n+1$ personas y vamos a representarlas con la notación: $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$.

a) Solución *sumando*:

Cada persona le da la mano a las otras n pero al contabilizar estos saludos, debemos considerar lo siguiente: A_1 se estrecha la mano con:

$$A_2, A_3, A_4, \ldots, A_n, A_{n+1}$$

con lo que, hasta aquí llevamos n apretones de mano.

A_2, aparte de que ya contabilizamos el apretón de manos con A_1, se estrecha la mano con:

$$A_3,\ A_4,\ A_5,\ \ldots,\ A_n,\ A_{n+1}$$

es decir, $n-1$ apretones más.

A_3, aparte de que ya se contabilizaron los saludos con A_1 y A_2, se estrecha la mano con:

$$A_4,\ A_5,\ A_6,\ \ldots,\ A_n,\ A_{n+1}$$

o sea, $n-2$ apretones más.

Y así sucesivamente hasta que llegamos a que A_n le da la mano a A_{n+1}, con lo que sumamos un apretón más, habiendo contabilizado ya los saludos con todos los demás. Y por último, notemos que los saludos de A_{n+1} están ya todos considerados. Entonces, el total de apretones de manos es:

$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

Dado que los apretones de mano fueron 66, tenemos que resolver la ecuación:

$$\frac{n(n+1)}{2}=66$$

b) *Utilizando combinatoria*:

El número de apretones de mano son las combinaciones de dos en dos de las $n+1$ personas, sin repetición, ya que una persona no se saluda a sí misma, y sin importar el orden, pues como vimos, es lo mismo $A_i \leftrightarrow A_j$ que $A_j \leftrightarrow A_i$. Tenemos entonces:

$$C_2^{n+1}=\frac{(n+1)!}{2![(n+1)-2]!}=\frac{(n+1)\cdot n\cdot \cancel{(n-1)!}}{2\cancel{(n-1)!}}=\frac{n(n+1)}{2}$$

Con lo que, al igual que el inciso anterior, llegamos a que la ecuación que hay que resolver es:

$$\frac{n(n+1)}{2}=66$$

c) Solución *con Geometría*:

Pensemos en un polígono de $n+1$ lados, con cuyos vértices vamos a representar a los asistentes de la reunión. Numeremos dichos vértices, en el sentido de las manecillas del reloj, con $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ y los lados con $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, de tal manera que A_i, $i \geq 1$, es el vértice al que concurren los lados a_i y a_{i+1}, la excepción de esta regla sería el vértice A_{n+1} al que concurren los lados a_{n+1} y a_1. Sea entonces el lado a_{i+1} el apretón de manos de A_i y A_{i+1}, y la excepción en este caso es que a_1 es el saludo entre A_{n+1} y A_1. Los $n+1$ lados del polígono son los apretones de mano que hasta aquí llevamos.

Ahora bien, una diagonal del polígono une un vértice con otro, lo que representaría que estas dos personas se estrechan la mano. Tenemos que para un polígono de $n+1$ lados, el número de diagonales es:

$$\tfrac{(n+1)[(n+1)-3]}{2} = \tfrac{(n+1)(n-2)}{2}$$

Entonces, el total de apretones de mano es la suma del número lados y el número de diagonales. Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} \#\text{ de saludos} &= (n+1) + \tfrac{(n+1)(n-2)}{2} \\ &= \tfrac{2(n+1)+(n+1)(n-2)}{2} \\ &= \tfrac{2n+2+n^2-n-2}{2} \\ &= \tfrac{n^2+n}{2} = \tfrac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, también llegamos a la misma ecuación por resolver:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 66$$

Vamos a resolver esta ecuación y calcular entonces el número de asistentes:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 66 \qquad \Rightarrow \qquad n^2 + n - 132 = (n+12)(n-11) = 0$$

Vemos que las soluciones de esta ecuación cuadrática son:

$$n = -12 \quad \text{y} \quad n = 11$$

Dado que $n > 0$, sólo es viable la segunda solución, $n = 11$. Tenemos entonces que a la reunión concurrieron $n+1 = 11+1 = 12$ personas.

A5. *Las dinámicas poblacionales de muchos peces se caracterizan por porcentajes de fertilidad extremadamente altos entre adultos y porcentajes de supervivencia muy bajos entre los jóvenes. Un lenguado maduro puede poner hasta 2.5 millones de huevos, pero sólo 0.00035% de la prole sobrevive a la edad de 3 años. Use notación científica para aproximar el número de descendientes que viven hasta la edad de 3 años.*

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} 2.5 \text{ millones } &= 2.5 \times 10^6 \\ 0.00035\% = 0.0000035 &= 3.5 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

Luego, el 0.00035% de 2.5 millones es:

$$(3.5 \times 10^{-6}) \cdot (2.5 \times 10^6) = 8.75 \times 10^{-6+6} = 8.75 \times 10^0 = 8.75$$

Es decir, de los 2.5 millones de huevos, 8 ó 9 peces sobreviven 3 años.

A7. *Dos de las raíces del polinomio* $P(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - x^2 - x + 6$ *son:*

$$r_1 = 1 \qquad y \qquad r_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

Determine las demás raíces y la factorización del polinomio en factores lineales o cuadráticos con coeficientes reales.

SOLUCIÓN: Si $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ es raíz del polinomio entonces su conjugado también es raíz de P. Con $r_3 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} (x-r_2)(x-r_3) &= \left(x - \tfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x - \tfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) = \tfrac{1}{4}\left(2x+1-\sqrt{3}i\right)\left(2x+1+\sqrt{3}i\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left[(2x+1)^2 - \left(\sqrt{3}i\right)^2\right] = \tfrac{1}{4}\left(4x^2+4x+1+3\right) = \tfrac{1}{4}\left(4x^2+4x+4\right) \\ &= x^2+x+1 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$P(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - x^2 - x + 6 = (x-1)(x^2+x+1) \cdot Q(x)$$

$$\Rightarrow \quad Q(x) = \frac{x^5 + x^4 - 6x^3 - x^2 - x + 6}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Para determinar $Q(x)$ primero usaremos división sintética con el factor $(x-1)$:

$$
\begin{array}{cccccc|c}
{\scriptstyle x^5} & {\scriptstyle x^4} & {\scriptstyle x^3} & {\scriptstyle x^2} & {\scriptstyle x^1} & {\scriptstyle x^0} & {\scriptstyle (x-1)} \\
1 & 1 & -6 & -1 & -1 & 6 & \underline{1} \\
 & 1 & 2 & -4 & -5 & -6 & \\
\hline
1 & 2 & -4 & -5 & -6 & 0 & \\
{\scriptstyle x^4} & {\scriptstyle x^3} & {\scriptstyle x^2} & {\scriptstyle x^1} & {\scriptstyle x^0} & {\scriptstyle \text{Res.}} &
\end{array}
$$

De donde:

$$Q(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6)}{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)} = \frac{x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6}{x^2 + x + 1}$$

Y tenemos:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x - 6 \\
\hline
x^2 + x + 1 & x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 \\
 & \underline{-x^4 - x^3 - x^2} \\
 & 0 + x^3 - 5x^2 - 5x \\
 & \quad \underline{- x^3 - x^2 - x} \\
 & \qquad 0 - 6x^2 - 6x - 6 \\
 & \qquad \underline{+ 6x^2 + 6x + 6} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Es decir que: $Q(x) = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ y, por lo tanto, las demás raíces del polinomio son $r_4 = 2$ y $r_5 = -3$. Luego:

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x+3)(x^2 + x + 1)$$

A9. *¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la del polinomio:*

$$P(x) = (x-1)^3(x+2)^2 \text{ ?}$$

Justifica tu respuesta.

SOLUCIÓN: De la ecuación vemos que las raíces del polinomio son:

$$r_1 = 1 \quad \text{y} \quad r_2 = -2$$

Por otro lado, si evaluamos el polinomio en $x = 0$ obtenemos:

$$P(0) = (0-1)^3(0+2)^2 = (-1)(4) = -4$$

La gráfica (D) presenta dichas raíces y tiene ordenada al origen igual a -4.

A11. *Encontrar el polinomio $P(x)$ de grado cuatro con coeficientes reales que cumple las condiciones siguientes:*

a) *Dos de sus raíces son: $r_1 = 2 - i$ y $r_2 = 3$.*

b) *$P(0) = 15$ y $P(4) = -1$.*

Solución: Un polinomio de grado cuatro tiene cuatro raíces. Como una de ellas es $2 - i$ entonces $r_3 = 2 + i$ también es raíz. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} P(x) &= A(x - 2 + i)(x - 2 - i)(x - 3)(x - r_4) \\ &= A(x^3 - 7x^2 + 17x - 15)(x - r_4) \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned} &P(0) = A(-15)(-r_4) = 15 \quad \rightarrow \quad A \cdot r_4 = 1 \quad \rightarrow \quad r_4 = \tfrac{1}{A} \\ &P(4) = A(5)(4 - r_4) = -1 \quad \rightarrow \quad 4 - r_4 = -\tfrac{1}{5A} \quad \rightarrow \quad r_4 = 4 + \tfrac{1}{5A} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{A} = 4 + \tfrac{1}{5A} \quad \rightarrow \quad A = \tfrac{1}{5} \quad \text{y, por lo tanto,} \quad r_4 = 5$$

Luego:

$$\begin{aligned} P(x) &= \tfrac{1}{5}(x^3 - 7x^2 + 17x - 15)(x - 5) \\ &= \tfrac{1}{5}(x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 100x + 75) \end{aligned}$$

A13. *$P(x)$ es un polinomio que cumple con las siguientes características:*

i) *Tiene solamente dos raíces reales: 1 y -1 . La primera, 1, es una raíz múltiple de orden par y la segunda, -1, es una raíz múltiple de orden impar.*

ii) *El número complejo $-i$ es una raíz de $P(x)$.*

Determina el grado del polinomio $P(x)$ y haz un boceto de su gráfica. Justifica tus respuestas.

solución: Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $x = 1$ es raíz de orden par (mínimo 2), $(x - 1)^{2n}$ es factor de $P(x)$.

Análogamente, si $x = -1$ es raíz de orden impar (mínimo 1), $(x + 1)^{2n-1}$ es factor del polinomio.

Ahora bien, si $(x + i)$ es factor, su conjugado $(x - i)$ también lo es; entonces $(x^2 + 1)$ también es factor de $P(x)$ ya que $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$.

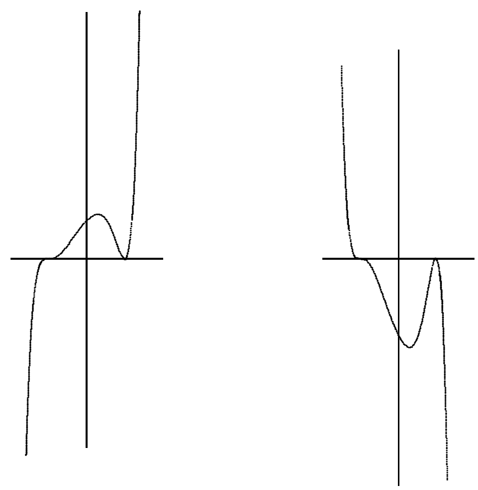
$P(x)$ podría además estar multiplicado por alguna constante, digamos $k \in \mathbb{R}$.

Así tenemos que

$$P(x) = k(x-1)^{2n}(x+1)^{2n-1}(x^2+1)$$

y el grado de este polinomio es:

$$(2n) + (2n-1) + 2 = 4n + 1 \quad \text{(mínimo 5)}.$$



$k > 0$ $\qquad$ $k < 0$

A15. *Si* $x : y = 2 : 3$, *encuentra la razón de* $(7x - 4y) : (3x + y)$.

SOLUCIÓN: Dado que $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, tenemos:

$$\frac{7x-4y}{3x+y} = \frac{\frac{7x-4y}{y}}{\frac{3x+y}{y}} = \frac{7\left(\frac{x}{y}\right) - 4}{3\left(\frac{x}{y}\right) + 1} = \frac{7\left(\frac{2}{3}\right) - 4}{3\left(\frac{2}{3}\right) + 1} = \frac{\frac{2}{\cancel{3}}}{\frac{9}{\cancel{3}}} = \frac{2}{9}$$

Entonces:

$$(7x - 4y) : (3x + y) = 2 : 9$$

A17. *Calcula la suma de los términos vigésimo al septuagésimo de la progresión aritmética cuyo n-ésimo término es* $\frac{n}{a} + b$.

Solución: Si $a_n = \frac{n}{a} + b$ entonces $a_1 = \frac{1}{a} + b$ y el k-ésimo término es $a_k = \frac{k}{a} + b$ y la suma de los primeros k términos es:

$$S_k = \tfrac{k}{2}(a_1 + a_k) = \tfrac{k}{2}\left(\tfrac{1}{a} + b + \tfrac{k}{a} + b\right) = \tfrac{k}{2}\left(\tfrac{k+1}{a} + 2b\right) = \tfrac{k(k+1)}{2a} + kb$$

Ahora bien, la suma de los términos del i-ésimo al m-ésimo la podemos calcular como: $S_m - S_{i-1}$; luego, para $i = 20$ y $m = 70$ tenemos:

$$\begin{aligned} S_{70} - S_{19} &= \tfrac{(70)(71)}{2a} + 70b - \tfrac{(19)(20)}{2a} - 19b \\ &= \tfrac{10}{2a}(7)(71) - \tfrac{10}{2a}(2)(19) + 51b \\ &= \tfrac{5}{a}(459) + 51b = \tfrac{5}{a}(51)(9) + 51b = 51\left(\tfrac{45}{a} + b\right) \end{aligned}$$

A19. *¿Para qué valores de m las raíces de la ecuación:*

$$\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m-1}{m+1}$$

serán iguales en magnitud pero de signos contrarios?

solución: Tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m-1}{m+1} \quad &\Rightarrow \quad x^2 - bx = \left(\frac{m-1}{m+1}\right) \cdot (ax - c) \\ &\rightarrow \quad x^2 - bx = \left(\frac{m-1}{m+1}\right) \cdot ax - \left(\frac{m-1}{m+1}\right) \cdot c \\ &\rightarrow \quad x^2 - bx - a\left(\frac{m-1}{m+1}\right) \cdot x + c\left(\frac{m-1}{m+1}\right) = 0 \\ &\rightarrow \quad x^2 - \left[b + a\left(\frac{m-1}{m+1}\right)\right] \cdot x + c\left(\frac{m-1}{m+1}\right) = 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

Supongamos que r_1 y r_2 son las raíces de esta ecuación cuadrática. Queremos encontrar m tal que $r_1 = -r_2$. Lo que necesitamos entonces es que la ecuación (3) sea una diferencia de cuadrados. Sean:

$$B = \left[b + a\left(\frac{m-1}{m+1}\right)\right] \quad \text{y} \quad C = c\left(\frac{m-1}{m+1}\right)$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} x^2 - Bx + C = 0 \quad &\rightarrow \quad x^2 - Bx + C + \frac{B^2}{4} - \frac{B^2}{4} = 0 \\ &\rightarrow \quad \left(x^2 - Bx + \frac{B^2}{4}\right) - \left(\frac{B^2}{4} - C\right) = 0 \\ &\rightarrow \quad \left(x - \frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B^2}{4} - C\right) = 0 \end{aligned}$$

Sea $D^2 = \dfrac{B^2}{4} - C$, entonces:

$$\left(x - \frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B^2}{4} - C\right) = \left(x - \frac{B}{2}\right)^2 - D^2 = 0$$

Por lo tanto:

$$\left[\left(x - \frac{B}{2}\right) - D\right]\left[\left(x - \frac{B}{2}\right) + D\right] = 0$$

$$\rightarrow \quad \left[x - \left(\frac{B}{2} + D\right)\right]\left[x + \left(D - \frac{B}{2}\right)\right] = 0$$

Si aquí hacemos $B = 0$ obtenemos $(x - D)(x + D)$ que es la diferencia de cuadrados que buscamos; luego:

$$\text{Si} \quad B = 0 \quad \text{entonces} \quad b + a\left(\frac{m-1}{m+1}\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad mb + b + ma - a = 0 \quad \rightarrow \quad m(a+b) = a - b \qquad \therefore \qquad m = \frac{a-b}{a+b}$$

Sustituyendo esto último en (3) obtenemos:

$$\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{\frac{a-b}{a+b} - 1}{\frac{a-b}{a+b} + 1} = \frac{\frac{a-b-a-b}{a+b}}{\frac{a-b+a+b}{a+b}} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

es decir,

$$\frac{x^2 - bx}{ax - c} = -\frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2 - bx}{ax - c} + \frac{b}{a} = 0 \quad \rightarrow \quad a(x^2 - bx) + b(ax - c) = 0$$

$$\rightarrow \quad ax^2 - abx + abx - bc = 0 \quad \rightarrow \quad ax^2 - bc = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{bc}{a}$$

$$\therefore \qquad r_1 = \sqrt{\frac{bc}{a}} \qquad \text{y} \qquad r_2 = -\sqrt{\frac{bc}{a}}$$

Es decir, con $m = \dfrac{a-b}{a+b}$ tenemos que $r_1 = -r_2$ (iguales en magnitud pero de signos contrarios).

A21. *¿Para cuáles valores de a se satisface el sistema de desigualdades:*

$$-3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$$

cualesquiera que sean los valores de x?

SOLUCIÓN: $x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ es una parábola que abre hacia arriba con vértice en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ por lo que la parábola siempre es positiva, es decir, $x^2-x+1>0$ para cualquier valor de x, entonces:

$$\begin{aligned}
& -3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2 \\
\Rightarrow \quad & -3(x^2-x+1) < x^2+ax-2 < 2(x^2-x+1) \\
\Rightarrow \quad & -3x^2+3x-3 < x^2+ax-2 \qquad \text{y} \qquad x^2+ax-2 < 2x^2-2x+2 \\
\Rightarrow \quad & \qquad 4x^2+(a-3)x+1 > 0 \qquad \text{y} \qquad x^2-(a+2)x+4 > 0 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Tenemos dos familias de parábolas que abren hacia arriba que conforman un sistema de desigualdades que deben cumplirse simultáneamente. Los valores del parámetro a determinan los miembros de estas familias. Lo que buscamos son los valores de dicho parámetro que simultáneamente generen parábolas positivas de ambas familias, es decir, que cumplan la condición (4).

Pensemos en el vértice de una parábola que abre hacia arriba. Si la ordenada del vértice es negativa, la parábola tiene dos raíces, digamos r_1 y r_2, por lo que para toda $x \in (r_1\,,\, r_2)$ la parábola es negativa. Si la ordenada del vértice es cero, la parábola tiene sólo una raíz, digamos r y para $x = r$ la parábola es cero. O sea, si la ordenada del vértice es menor o igual a cero, no se cumple que *para cualquier valor de x*, la expresión cuadrática que define la parábola sea mayor que cero. Pero si la ordenada del vértice es estrictamente positiva, la parábola queda completamente por arriba del eje X, es decir, la parábola es siempre positiva para cualquier valor de x. Vamos entonces a determinar los vértices de ambas familias de parábolas:

$$\begin{aligned}4x^2+(a-3)x+1 &= 4\left(x^2+\tfrac{a-3}{4}x+\tfrac{(a-3)^2}{64}\right)+1-\tfrac{(a-3)^2}{16}\\ &= 4\left(x+\tfrac{a-3}{2}\right)^2+1-\tfrac{(a-3)^2}{16}; \quad \text{vértice: } \left(-\tfrac{a-3}{2}\,,\, 1-\tfrac{(a-3)^2}{16}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2-(a+2)x+4 &= \left(x^2-(a+2)x+\tfrac{(a+2)^2}{4}\right)+4-\tfrac{(a+2)^2}{4}>0\\ &= \left(x-\tfrac{a+2}{2}\right)^2+4-\tfrac{(a+2)^2}{4}; \quad \text{vértice: } \left(\tfrac{a+2}{2}\,,\, 4-\tfrac{(a+2)^2}{4}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{rrcl} & 4x^2+(a-3)x+1>0 & \text{si} & 1-\tfrac{(a-3)^2}{16}>0\\ \text{y} & x^2-(a+2)x+4>0 & \text{si} & 4-\tfrac{(a+2)^2}{4}>0\end{array}$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{array}{rrcr} & 1-\tfrac{(a-3)^2}{16}>0 & \text{y} & 4-\tfrac{(a+2)^2}{4}>0\\ \Rightarrow & \tfrac{(a-3)^2}{16}<1 & \text{y} & \tfrac{(a+2)^2}{4}<4\\ \Rightarrow & \left|\tfrac{a-3}{4}\right|<1 & \text{y} & \left|\tfrac{a+2}{2}\right|<2\\ \Rightarrow & -1<\tfrac{a-3}{4}<1 & \text{y} & -2<\tfrac{a+2}{2}<2\\ \Rightarrow & -4<a-3<4 & \text{y} & -4<a+2<4\\ \Rightarrow & -1<a<7 & \text{y} & -6<a<2\end{array}$$

Luego, la solución es:

$$S=\left\{a \;\middle|\; a\in(-1,7)\cap(-6,2)=(-1,2)\right\}$$

Es decir, para cualquier valor de x se cumple que:

$$-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2 \qquad \text{si} \qquad a\in(-1,2)$$

A23. *Pruebe que:*

$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad y \qquad \omega^2$$

son raíces cúbicas de la unidad.

SOLUCIÓN: Para el número complejo $z = (a,b)$ tenemos que $z^2 = (a^2 - b^2, 2ab)$ y $z^3 = (a^3 - 3ab^2, 3a^2b - b^3)$. Entonces, si $\omega = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\omega^3 &= \left(\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 ,\ 3\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)\\ &= \left(-\tfrac{1}{8} + \tfrac{9}{8} ,\ \tfrac{3\sqrt{3}}{8} - \tfrac{3\sqrt{3}}{8}\right) = (1,0)\end{aligned}$$

luego, ω es raíz cúbica de 1. Calculemos ahora ω^2:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \left(\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 ,\ 2\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\\ &= \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4} ,\ -\tfrac{2\sqrt{3}}{4}\right) = \left(-\tfrac{1}{2} ,\ -\tfrac{2\sqrt{3}}{4}\right)\end{aligned}$$

Para el número complejo $\omega^2 = \left(-\frac{1}{2} , -\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\left(\omega^2\right)^3 &= \left(\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{2\sqrt{3}}{4}\right)^2 ,\ 3\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2\left(-\tfrac{2\sqrt{3}}{4}\right) - \left(-\tfrac{2\sqrt{3}}{4}\right)^3\right)\\ &= \left(-\tfrac{1}{8} + \tfrac{9}{8} ,\ -\tfrac{3\sqrt{3}}{8} + \tfrac{3\sqrt{3}}{8}\right) = (1,0)\end{aligned}$$

Por lo tanto ω^2 también es raíz cúbica de 1.

A25. *¿Bajo qué condiciones el módulo de la suma de dos números complejos es igual a la diferencia de los módulos de los sumandos?*

SOLUCIÓN: Sean $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d)$ dos números complejos cuyos módulos son, respectivamente:

$$r_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \sqrt{c^2 + d^2}$$

Respecto a la suma de estos dos números tenemos que: $z_1 + z_2 = (a+c, b+d)$, cuyo módulo es:

$$r_S = \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$$

Por otro lado, la diferencia de los módulos de z_1 y z_2 es:

$$\begin{aligned}
|r_1 - r_2| &= \left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2 - 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}} \\
&= \sqrt{(a^2+c^2)+(b^2+d^2) - 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}} \\
&= \sqrt{(a^2+c^2+2ac) - 2ac + (b^2+d^2+2bd) - 2bd - 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}} \\
&= \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2 - 2ac - 2bd - 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}
\end{aligned}$$

Luego, el módulo de la suma de dos números complejos es igual a la diferencia de los módulos de dichos números si se cumple la condición:

$$-2ac - 2bd - 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = -(ac+bd) \tag{5}$$

donde, dado que $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} > 0$, necesariamente debe cumplirse que:

$$ac + bd < 0 \tag{6}$$

Ahora bien, de (5) tenemos:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = -(ac+bd) \\
\rightarrow \quad & (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 \\
\rightarrow \quad & (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 = (ac)^2 + 2abcd + (bd)^2 \\
\rightarrow \quad & (ad)^2 + (bc)^2 = 2abcd \\
\rightarrow \quad & (ad)^2 + (bc)^2 - 2(ad)(bc) = 0 \\
\rightarrow \quad & (ad - bc)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad ad = bc \quad \rightarrow \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}
\end{aligned}$$

Sea $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = k$, entonces:

$$a = kc \qquad \text{y} \qquad b = kd \tag{7}$$

Sustituyendo (7) en (6):

$$ac + bd < 0 \quad \rightarrow \quad (kc)c + (kd)d = k(c^2+d^2) < 0 \quad \rightarrow \quad k < 0$$

Por lo tanto, el módulo de $z_1 + z_2$ es igual a la diferencia de los módulos de los sumandos, es decir:

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} = \left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}\right|$$

si los números son uno múltiplo negativo del otro:

$$(a,b) = (kc,kd) = k(c,d), \qquad k < 0$$

Vamos a comprobarlo. Sea $\ell > 0$ tal que $z_2 = -\ell \cdot z_1$. Tenemos que:

$$|z_2| = \ell \cdot |z_1| \qquad \text{y} \qquad |z_1 + z_2| = (1-\ell)\cdot |z_1|$$

por lo tanto:

$$|z_1 + z_2| = (1-\ell)\cdot|z_1| = |z_1| - \ell\cdot|z_1| = |z_1| - |z_2|$$

A27. *Pruebe que los puntos $P(a,b,c)$ para los cuales el sistema*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & & & = & a \\ 2x & - & y & + & 7z & = & b \\ -x & + & 2y & - & 5z & = & c \end{array}$$

tiene solución, son puntos de un plano. Encuentre la ecuación de dicho plano.

Solución: Por el método de Gauss tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & a \\ 2 & -1 & 7 & b \\ -1 & 2 & 5 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2a-b}{7} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{a-c}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2a-b}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a-c}{5} - \frac{2a-b}{7} \end{array}\right)$$

Luego, el sistema tiene solución múltiple si:

$$\frac{a-c}{5} - \frac{2a-b}{7} = 0 \quad \rightarrow \quad 7a - 7c - 10b + 5b = 0 \quad \therefore \quad 3a - 5b + 7c = 0$$

Es decir, son soluciones del sistema todos los puntos (a,b,c) que pertenezcan al plano:

$$3a - 5b + 7c = 0$$

A29. *¿Cuántas cifras en una aproximación decimal para $\frac{1}{7}$ deben usarse para tener un error menor que un millonésimo en cálculos (multiplicación y división) que se hagan con esa fracción?* ***Justifica tu respuesta****.*

solución: Debemos usar al menos 7 cifras decimales para tener un error menor que un millonésimo.

Veamos el siguiente ejemplo. Tenemos que

$$\frac{7}{7} = 7 \cdot \frac{1}{7} = 1.$$

Un millonésimo es 0.000001; y $\quad \frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots$

Tomando seis cifras decimales de precisión, esto es $\frac{1}{7} \approx 0.142857$, tenemos que:

$$7 \cdot \frac{1}{7} = 7(0.142857) = 0.999999$$

Como $7 \cdot \frac{1}{7} = 1$, tenemos que $E = 1 - 0.999999 = 0.000001$ y esto es *igual a un millonésimo*.

Ahora bien, si tomamos siete cifras, es decir $\frac{1}{7} \approx 0.1428571$, tenemos que:

$$7 \cdot \frac{1}{7} = 7(0.1428571) = 0.9999997$$

con lo que obtenemos $E = 1 - 0.9999997 = 0.0000003$, lo cual es *menor que un millonésimo*. En la siguiente tabla podemos ver otros ejemplos:

	$\frac{1}{7} \approx 0.142857$	$\frac{1}{7} \approx 0.1428571$
$\frac{7^2}{7^2} = 49\left(\frac{1}{7}\right)^2 = 1$	$49(0.142857)^2 = 0.999998$ $\rightarrow E = 0.000002$ (igual a dos millonésimos)	$49(0.1428571)^2 = 0.9999994$ $\rightarrow E = 0.0000004$ (menor a un millonésimo)
$\frac{7^3}{7^3} = 343\left(\frac{1}{7}\right)^3 = 1$	$343(0.142857)^3 = 0.999997$ $\rightarrow E = 0.000003$ (igual a tres millonésimos)	$343(0.1428571)^3 = 0.9999991$ $\rightarrow E = 0.0000001$ (menor a un millonésimo)

II. Geometría y Trigonometría

GT1. El ángulo $\measuredangle EFD$ es suplementario de α y el ángulo $\measuredangle ABC$ es suplementario de β. Como $\alpha = \beta$, entonces

$$\measuredangle EFD = \measuredangle ABC$$

Tenemos también que $EF = BE + BF$ y $BC = CF + BF$; como $CF = BE$ entonces $BC = EF$, y dado que $AB = DF$ tenemos que los triángulos ABC y DFE son congruentes por LAL; luego,

$$AC = DE$$

GT3. Sea F la intersección de los segmentos DE y AB. Tenemos que

$$\measuredangle AFD = \measuredangle BFE$$

Luego, para los triángulos ADF y EBF tenemos que dos de sus ángulos son iguales y, por lo tanto, el tercero también lo es, lo que corresponde a que

$$\measuredangle DAF = \measuredangle FEB$$

Por otro lado, por ser $\measuredangle CDE$ y $\measuredangle ABC$ ángulos suplementarios de $\measuredangle ADE$ y $\measuredangle ABE$, respectivamente, y dado que $\measuredangle ADE = \measuredangle ABE$, tenemos que

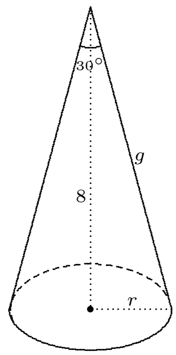
$$\measuredangle CDE = \measuredangle ABC$$

Entonces los triángulos ABC y EDC tienen un lado y los tres ángulos iguales, por lo tanto son congruentes por ALA, lo que implica que

$$AB = DE$$

GT5. *Si se tiene una pirámide pentagonal inscrita en un cono recto de altura igual a 8 unidades y un ángulo de abertura de* $30°$*, determine las dimensiones de las aristas de la pirámide, así como la longitud de una diagonal de la base.*

SOLUCIÓN: Sea μ la unidad de medida. Vamos primero a calcular el radio de la base del cono y la magnitud de su generatriz:



Tenemos que:

$$\tan(15^\circ) = \frac{r}{8}$$

donde:

$$\tan(15^\circ) = \tan\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(30^\circ)}{1+\cos(30^\circ)}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

Ahora bien:

$$\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})}\cdot\frac{(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}} = 2-\sqrt{3}$$

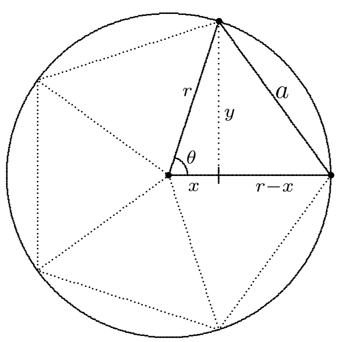
Luego:

$$\frac{r}{8} = 2-\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad r = 8\left(2-\sqrt{3}\right)\mu$$

Respecto a la arista de la pirámide pentagonal, ésta es igual a la generatriz del cono, así que g es la magnitud de dicha arista:

$$g^2 = r^2 + 64 = 64(2-\sqrt{3})^2 + 64 = 16^2(2-\sqrt{3}) \quad \Rightarrow \quad g = 16\sqrt{2-\sqrt{3}}\,\mu$$

De la base, vamos ahora a calcular la arista del pentágono y la longitud de sus diagonales:



De la figura, conocemos los valores de r y θ:

$$r = 8\left(2-\sqrt{3}\right)\mu \;\text{ y }\; \theta = \tfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ.$$

Ahora bien, a es la magnitud de la arista del pentágono y tenemos que:

$$a^2 = (r-x)^2 + y^2 \tag{8}$$

$$x = r\cdot\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\cdot\operatorname{sen}\theta \tag{9}$$

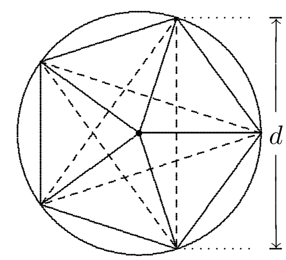
Sustituimos (9) en (8):

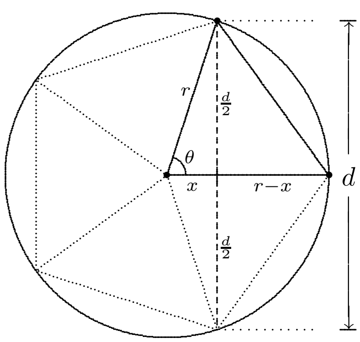
$$\begin{aligned} a^2 &= (r - r\cdot\cos\theta)^2 + (r\cdot\operatorname{sen}\theta)^2 = r^2(1-\cos\theta)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r^2\left[2(1-\cos\theta)\right] \\ \Rightarrow \quad a &= r\sqrt{2(1-\cos\theta)} = 8(2-\sqrt{3})\sqrt{2(1-\cos 72^\circ)} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\Rightarrow \quad a \approx 2.52\,\mu$$

Por último, vamos a calcular la magnitud d de las diagonales de la base pentagonal. En la figura, dichas diagonales son los segmentos punteados.





De la figura tenemos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\frac{d}{2}}{r} \quad \Rightarrow \quad d = 2r\cdot\operatorname{sen}\theta$$

Recordemos que $r = 8\left(2-\sqrt{3}\right)$ y $\theta = 72^\circ$, por lo tanto:

$$d = 16\left(2-\sqrt{3}\right)\operatorname{sen}72^\circ \approx 4.08\,\mu$$

GT7. *Dado un triángulo ¿es posible construir una circunferencia que pase por sus tres vértices? Explique su respuesta.*

SOLUCIÓN: La mediatriz de un segmento es una recta perpendicular a dicho segmento que pasa por su punto medio, con la propiedad de que todo punto de la recta equidista de los extremos del segmento.

Dado *cualquier* triángulo ABC, sean ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 las mediatrices de los segmentos AB, BC y AC respectivamente, es decir, las mediatrices de los lados del triángulo. Como AB y BC no son paralelos, entonces existe un punto P donde ℓ_1 y ℓ_2 se intersecan. Como P pertenece a ambas rectas se cumple que:

$$PA = PB \quad \text{y} \quad PB = PC \qquad \Rightarrow \qquad PA = PC$$

Si $PA = PC$, quiere decir que el punto P equidista de los extremos del segmento AC, lo que implica que P pertenece a ℓ_3. Entonces, dado *cualquier* triángulo ABC, las mediatrices de sus lados se intersecan en un punto P, llamado *circuncentro*, y se cumple que:

$$PA = PB = PC$$

por lo que si trazamos una circunferencia centrada en P con radio PA, pasa por los tres vértices del triángulo.

GT9. Si $a^2 + b^2 = 1$, demuestra que: $\quad a \operatorname{sen} x + b \cos x \leq 1.$

SOLUCIÓN: Tenemos que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y dado que $a^2 + b^2 = 1$, entonces:

$$(a^2 + b^2)(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = a^2 \operatorname{sen}^2 x + a^2 \cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x = 1$$

de donde:

$$a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x = 1 - a^2 \cos^2 x - b^2 \operatorname{sen}^2 x$$

Completando el cuadrado obtenemos:

$$\begin{aligned} a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x + 2ab \operatorname{sen} x \cos x &= 1 - a^2 \cos^2 x - b^2 \operatorname{sen}^2 x + 2ab \operatorname{sen} x \cos x \\ &= 1 - (a^2 \cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x - 2ab \operatorname{sen} x \cos x) \\ \Rightarrow \quad (a \operatorname{sen} x + b \cos x)^2 &= 1 - (a \cos x - b \operatorname{sen} x)^2 \end{aligned}$$

Como $1 - (a \cos x - b \operatorname{sen} x)^2 = (a \operatorname{sen} x + b \cos x)^2 \geq 0$, entonces:

$$1 - (a \cos x - b \operatorname{sen} x)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq (a \cos x - b \operatorname{sen} x)^2 \leq 1$$

Luego:

$$0 \leq (a \operatorname{sen} x + b \cos x)^2 = 1 - (a \cos x - b \operatorname{sen} x)^2 \leq 1$$

Por lo tanto:

$$0 \leq (a \operatorname{sen} x + b \cos x)^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \left| a \operatorname{sen} x + b \cos x \right| \leq 1$$

$$\therefore \qquad -1 \leq a \operatorname{sen} x + b \cos x \leq 1$$

GT11. *a*) $3\,\mathrm{sen}\,A = 2(\cos A)^2$

Tenemos que

$$3\,\mathrm{sen}\,A - 2\cos^2 A = 0$$

de donde

$$3\,\mathrm{sen}\,A - 2(1 - \mathrm{sen}^2 A) = 0$$

y por lo tanto

$$2\,\mathrm{sen}^2 A + 3\,\mathrm{sen}\,A - 2 = 0 \tag{10}$$

Sea $x = \mathrm{sen}\,A$, lo que implica que $-1 \leq x \leq 1$. Sustituyendo en la ecuación (1) obtenemos

$$2x^2 + 3x - 2 = (2x - 1)(x + 2) = 0$$

Luego,

$$x = \frac{1}{2} \qquad \text{ó} \qquad x = -2$$

pero $x = -2$ no puede ser solución porque $-1 \leq x \leq 1$, entonces la solución es

$$x = \mathrm{sen}\,A = \frac{1}{2}; \quad \text{por lo tanto,} \quad A = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,, \quad k \in \{\mathbb{Z} + 0\}$$

c) $\cos^2 x - \mathrm{sen}\,x \cos x = 0,\ x \in [0, 2\pi]$.

Podemos factorizar $\cos^2 x - \mathrm{sen}\,x\cos x$ como: $\cos x(\cos x - \mathrm{sen}\,x)$ y utilizar el hecho de que si un producto es cero, al menos uno de sus factores es cero. Así, la ecuación

$$\cos x(\cos x - \mathrm{sen}\,x) = 0 \tag{11}$$

se cumple si: **i)** $\cos x = 0$; **ii)** $\cos x - \mathrm{sen}\,x = 0$.

Caso i): Para la ecuación $\cos x = 0$, tenemos que

$$\big\{x \in [0, 2\pi] \,\big|\, \cos x = 0\big\} = \left\{x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{3\pi}{2}\right\}$$

es decir, x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación (11).

Caso ii): Para la ecuación $\cos x - \operatorname{sen} x = 0$, tenemos que

$$\cos x - \operatorname{sen} x = \cos x - \sqrt{1 - \cos^2 x} = 0$$

De aquí obtenemos que:

$$(\cos x)^2 = \left(\sqrt{1 - \cos^2 x}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

Por lo tanto:

$$2\cos^2 x = 1 \quad \rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego, para $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tenemos:

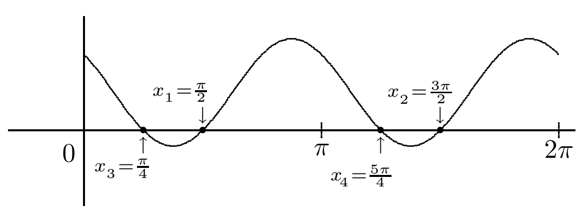
$$\left\{ x \in [0, 2\pi] \,\middle|\, \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \left\{ x_3 = \frac{\pi}{4},\ x_4 = \frac{5\pi}{4} \right\}$$

es decir, x_3 y x_4 son también soluciones de la ecuación (11).

Lo que tenemos entonces es que el conjunto solución para la ecuación

$$\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x = 0$$

es: $\left\{ x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{3\pi}{2},\ x_3 = \frac{\pi}{4},\ x_4 = \frac{5\pi}{4} \right\}$. Este conjunto corresponde a las raíces de la función $f(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x = 0$, lo cual puede verse en la siguiente gráfica:



$f(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x$

e) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1,\ -8 \leq x \leq 0.$
Vamos a partir de la identidad trigonométrica: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
de donde tenemos que: $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x}.$

Sustituyendo en la ecuación a resolver, $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$, obtenemos:

$$\sqrt{1-\cos^2 x} + \cos x = 1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{1-\cos^2 x} = 1 - \cos x.$$

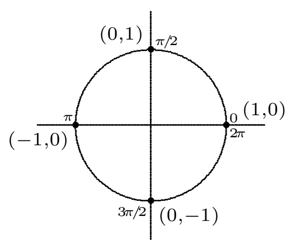
Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación

$$1 - \cos^2 x = (1-\cos x)^2 = 1 - 2\cos x + \cos^2 x$$

lo que puede reducirse a

$$2\cos^2 x - 2\cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \cos^2 x - \cos x = \cos x(\cos x - 1) = 0$$

Esta igualdad se cumple si $\cos x = 0$ o si $\cos x = 1$. Si sustituimos la primera de estas soluciones en la ecuación original $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$, obtenemos $\operatorname{sen} x = 1$, luego, $(\cos x, \operatorname{sen} x) = (0,1)$; y si sustituímos $\cos x = 1$ obtenemos $(\cos x, \operatorname{sen} x) = (1,0)$



Ahora bien, en el círculo trigonométrico, donde los pares ordenados son $(\cos x, \operatorname{sen} x)$, podemos ver que $(\cos x, \operatorname{sen} x) = (0,1)$ se encuentra en $x = \frac{\pi}{2}$, y sabiendo de la perioricidad de las funciones trigonométricas, lo volveríamos a encontrar después de cada vuelta completa, es decir, en $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{4k+1}{2}\pi$, siendo k cualquier entero o cero.

Para el segundo caso, $(\cos x, \operatorname{sen} x) = (1,0)$ se encuentra en $x = 0$ y después de cada vuelta completa, es decir, en $x = 0 + 2k\pi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^{+\{0\}}$. En resumen, el conjunto solución de la ecuación $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$ es

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = \frac{4k+1}{2}\pi \text{ ó } x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^{+\{0\}} \right\}$$

De estas soluciones, las que pertenecen al intervalo $[-8, 0]$ son:

$$x = \left\{ -2\pi,\ -\frac{3}{2}\pi,\ 0 \right\}.$$

GT13. Sea Z' el punto de intersección de la perpendicular con el lado BC. Tenemos que los triángulos $BZ'Y$ y $CZ'Z$ son ambos rectángulos en Z', luego:

$$B + Y = C + Z$$

Si los ángulos iguales de ABC, dado que es isósceles, son B y C, entonces $Y = Z$ con lo que AYZ también es isósceles.

GT15. Expresa $\operatorname{sen}(3z)$ en términos de potencias de $\operatorname{sen}(z)$.

SOLUCIÓN: Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \\
\operatorname{sen}(2a) &= 2 \operatorname{sen} a \cos a \\
\cos(2a) &= \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \\
\cos^2 a &= 1 - \operatorname{sen}^2 a
\end{aligned}$$

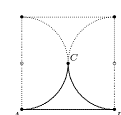
Ahora bien, $3z = z + 2z$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(3z) &= \operatorname{sen}(z+2z) = \operatorname{sen}(z)\cos(2z) + \cos(z)\operatorname{sen}(2z) \\
&= \operatorname{sen}(z)\left[\cos^2(z) - \operatorname{sen}^2(z)\right] + \cos(z)\left[2\operatorname{sen}(z)\cos(z)\right] \\
&= \operatorname{sen}(z)\left[1 - \operatorname{sen}^2(z) - \operatorname{sen}^2(z)\right] + 2\operatorname{sen}(z)\cos^2(z) \\
&= \operatorname{sen}(z)\left[1 - 2\operatorname{sen}^2(z)\right] + 2\operatorname{sen}(z)\left[1 - \operatorname{sen}^2(z)\right] \\
&= \operatorname{sen}(z) - 2\operatorname{sen}^3(z) + 2\operatorname{sen}(z) - 2\operatorname{sen}^3(z) \\
&= 3\operatorname{sen}(z) - 4\operatorname{sen}^3(z)
\end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$\operatorname{sen}(3z) = 3\operatorname{sen}(z) - 4\operatorname{sen}^3(z)$$

GT17. *En la siguiente figura el lado del cuadrado mide $\sqrt{6}$ cm, ¿cuánto mide el área ABC, limitada por el trazo grueso?*



SOLUCIÓN: El área del cuadrado es 6cm^2. Los dos semi-círculos forman un círculo inscrito al cuadrado. Por lo tanto, el radio de este círculo es $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$ y su área es

$$\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi}{2}.$$

El área que queda entre el cuadrado y el círculo es:

$$6 - \frac{3\pi}{2}$$

El área que buscamos es la mitad del área que queda entre el cuadrado y el círculo, esto es:

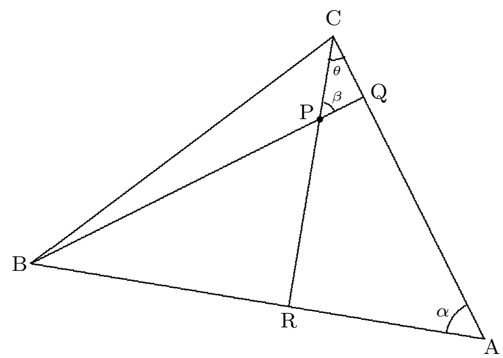
$$\frac{1}{2}\left(6-\frac{3\pi}{2}\right)=3-\frac{3\pi}{4}=\frac{3}{4}(4-\pi)\text{cm}^2$$

GT19. *Demostrar que al trazar las alturas de un triángulo a partir de dos de sus vértices, dichas alturas se intersecan formando un ángulo igual al ángulo del tercer vértice (del que no se trazó altura).*

SOLUCIÓN:

Sean A, B y C los vértices de un triángulo. Los segmentos BQ y CR son las alturas trazadas a partir de los vértices B y C, respectivamente; y sea sea P el punto de intersección de dichas alturas.

Con respecto a los ángulos, sea α el ángulo del vértice A y sean β y θ los ángulos del triángulo CPQ en los vértices P y C, respectivamente. (Ver figura)



Para demostrar que los ángulos α y β son iguales, consideremos lo siguiente:

ACR es un triángulo rectángulo ya que en el vértice R el ángulo es recto. Por lo tanto,

$$\alpha+\theta=90^\circ \tag{12}$$

También CPQ es triángulo rectángulo, en el vértice Q el ángulo es recto. Entonces,

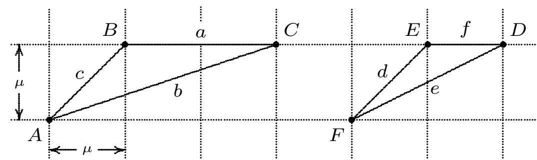
$$\beta+\theta=90^\circ \tag{13}$$

De (12) y (13) tenemos que

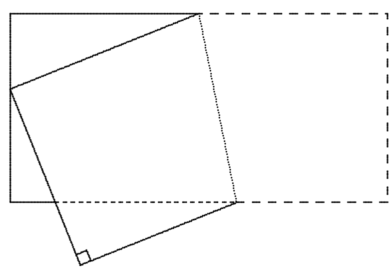
$$\alpha+\theta=\beta+\theta \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha=\beta$$

GT21. Sí son semejantes porque sus tres lados son proporcionales, como probaremos a continuación:

triángulo ABC	triángulo DEF		
$a = 2\mu$	$d = \sqrt{\mu^2 + \mu^2} = \sqrt{2}\mu$	$\Rightarrow$	$a = \sqrt{2} \cdot d$
$b = \sqrt{9\mu^2 + \mu^2} = \sqrt{10}\mu$	$e = \sqrt{4\mu^2 + \mu^2} = \sqrt{5}\mu$	$\Rightarrow$	$b = \sqrt{2} \cdot e$
$c = \sqrt{\mu^2 + \mu^2} = \sqrt{2}\mu$	$f = \mu$	$\Rightarrow$	$c = \sqrt{2} \cdot f$



GT23. *Al doblar una hoja de papel como se indica en la figura, se determinan tres triángulos. Etiqueta sus vértices y escribe cuáles son esos triángulos. ¿Por qué son semejantes los tres triángulos?*



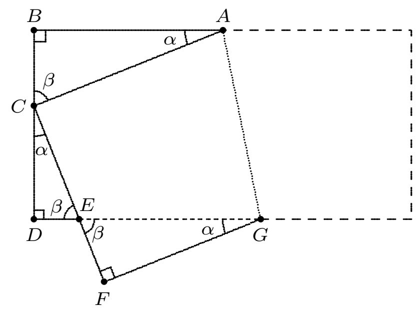
SOLUCIÓN: ABC, CDE y EFG, son triángulos rectángulos ya que los vértices B, D y F, respectivamente, corresponden a las esquinas de la hoja de papel, por lo tanto son ángulos rectos. Luego, $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle ACB$, $\measuredangle CED$ y $\measuredangle DCE$, así como $\measuredangle EGF$ y $\measuredangle FEG$, son, en cada caso, ángulos complementarios. Sean $\measuredangle EGF = \alpha$ y $\measuredangle FEG = \beta$. Tenemos entonces que $\alpha + \beta = 90°$.

Notemos que los segmentos AC y FG pertenecen a lados opuestos de la hoja y pasa lo mismo con AB y EG, luego:

$$\text{Si} \quad AC \parallel FG \quad \text{y} \quad AB \parallel EG \qquad \Rightarrow \quad \measuredangle BAC = \measuredangle EGF = \alpha$$

Entonces $\measuredangle BAC = \alpha$. Como $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle ACB$ son complementarios entonces $\measuredangle ACB = \beta$.

Por otro lado tenemos que $\measuredangle CED = \measuredangle FEG = \beta$ ya que son opuestos por el vértice. Entonces $\measuredangle CED = \beta$. Como $\measuredangle CED$ y $\measuredangle DCE$ son complementarios entonces $\measuredangle DCE = \alpha$.



En resumen:

$$\measuredangle BAC = \measuredangle EGF = \measuredangle DCE = \alpha$$
$$\measuredangle CED = \measuredangle FEG = \measuredangle ACB = \beta$$

Como puede apreciarse en la figura, los tres triángulos tienen tres ángulos iguales por lo que son semejantes.

GT25. *Trace un triángulo rectángulo y sobre cada uno de sus lados construya triángulos equiláteros hacia fuera.*

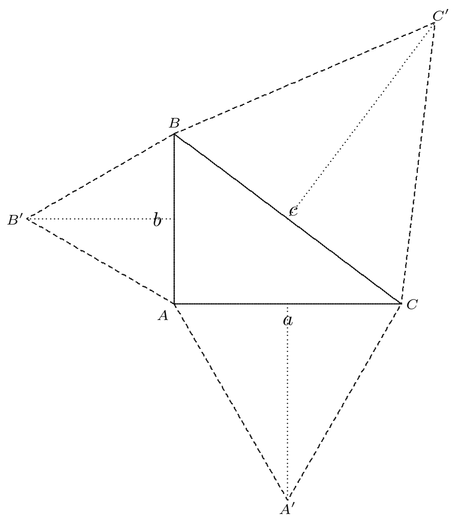
La suma de las áreas de los triángulos equiláteros sobre los catetos ¿cómo es respecto al área del triángulo equilátero sobre la hipotenusa? Justifique su respuesta.

SOLUCIÓN: De acuerdo a la siguiente figura, vamos a calcular el área del triángulo $AA'C$. Los lados de este triángulo equilátero miden a. La longitud de la recta que une el punto medio de uno de sus lados con el vértice opuesto corresponde a la altura, la cual podemos calcularla mediante el Teorema de Pitágoras:

$$h_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Luego, su área es:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



Análogamente calculamos las áreas de ABB' y BCC' las cuales, respectivamente, son

$$\frac{\sqrt{3}}{4}b^2 \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

Ahora bien, la suma de las áreas de $AA'C$ y ABB' es

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

ya que, por el Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$. Pero $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$ corresponde al área de BCC'. Así:

La suma de las áreas de los triángulos equiláteros sobre los catetos es igual al área del triángulo equilátero sobre la hipotenusa.

GT27. *Verifique la identidad:* $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos(2x)} = \tan x.$

Solución: Usaremos las identidades trigonométricas del ángulo doble para las funciones seno y coseno:

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x \quad \text{y} \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Tenemos entonces que:

$$\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos(2x)} = \frac{2\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{1+\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{(1-\operatorname{sen}^2 x)+\cos^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$$

$$\therefore \qquad \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos(2x)} = \tan x$$

GT29. *Una rueda de la fortuna tiene un diámetro de 16 metros y su parte más baja está a un metro de altura del suelo. A partir de un momento la rueda empieza a girar a una velocidad de giro uniforme de manera tal que da 3 vueltas en un minuto. Determina la altura de una canastilla de la rueda como función del tiempo, suponiendo que cuando* $t = 0$ *la canastilla se encuentra en la parte más alta de la rueda de la fortuna.*

Solución: Al ser un movimiento uniforme, a iguales incrementos de tiempo le corresponden iguales desplazamientos angulares, es decir, *el ángulo θ es una función lineal del tiempo t.* Sea t medido en segundos. Sabemos que en $t = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ (está hasta arriba). También sabemos que en 20 segundos la rueda de la fortuna da toda la vuelta (3 vueltas en un minuto), luego en 5 segundos avanza un cuarto de vuelta; o sea, en $t = 5$, $\theta = \pi$. Tenemos entonces dos puntos de la función lineal tiempo - desplazamiento angular: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $(5, \pi)$ con lo que tenemos:

$$\theta = \tfrac{\pi}{10}t + \tfrac{\pi}{2}$$

Ahora bien, la posición de la canastilla de la rueda de la fortuna en cierto momento es un punto (x, y) sobre la circunferencia tal que:

$$x = 8\cos\theta$$
$$y = 8\operatorname{sen}\theta + 9$$

donde y es la altura con respecto al suelo; luego tenemos que:

$$y(t) = 8\operatorname{sen}\left[\tfrac{\pi}{10}t + \tfrac{\pi}{2}\right] + 9$$

GT31. *Utilizando identidades trigonométricas (indicándolas), calcular:*

a) $\operatorname{sen} 75^\circ$ *b*) $\cos 15^\circ$ *c*) $\tan 22.5^\circ$

Solución:

a) Tenemos que: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$. Entonces:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 75^\circ &= \operatorname{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

b) Tenemos que: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$. Entonces:

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$c)$ Tenemos que: $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\tan 22.5^\circ &= \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}}\\ &= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1} = 3-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

III. Geometría Analítica

GA1. *Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta:* $2x - y = 3$ *y que pasa por la intersección de esta última y la recta:* $2y - x = 1$.

SOLUCIÓN: La intersección de las rectas $2x - y = 3$ y $2y - x = 1$ es:

$$2x - 3 = \tfrac{1}{2}(x+1) \quad \to \quad 4x - 6 = x + 1 \quad \to \quad 3x - 7 = 0$$
$$\to \quad x = \tfrac{7}{3} \quad \therefore \quad y = 2\left(\tfrac{7}{3}\right) - 3 = \tfrac{5}{3}$$

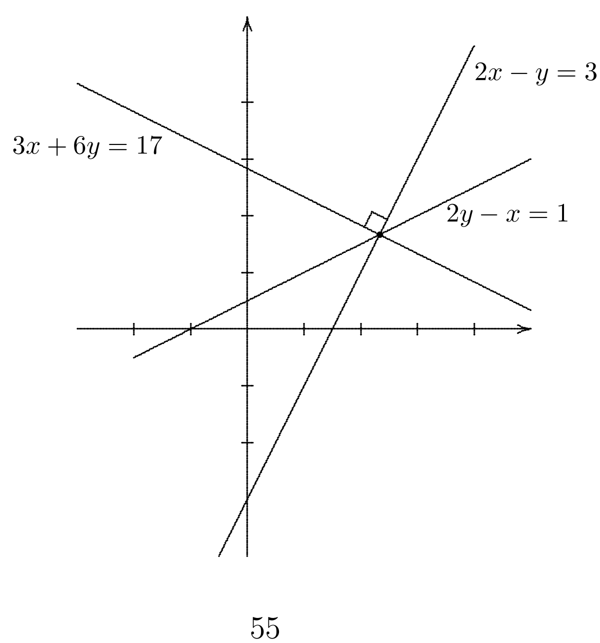
Tenemos entonces que el punto de intersección de estas rectas es: $P\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Ahora bien, la pendiente de $2x - y = 3$ es $m = 2$ y la familia de rectas perpendiculares a ella tiene pendiente $m_\perp = -\frac{1}{2}$. Dicha familia está representada algebraicamente por la ecuación: $x + 2y = C_2$. La recta que buscamos pertenece a esta familia pero es la que pasa por el punto $P\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$:

$$\tfrac{7}{3} + 2\left(\tfrac{5}{3}\right) = C_2 \quad \to \quad C_2 = \tfrac{17}{3}$$

Luego, la recta que buscamos es:

$$x + 2y = \tfrac{17}{3} \quad \to \quad 3x + 6y = 17$$



GA3. *¿Qué condición debe cumplir* λ *para que la ecuación:*

$$\lambda x^2 + \lambda y^2 + 2a\lambda x + a^2 = 0$$

represente una circunferencia?

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \lambda x^2 + \lambda y^2 + 2a\lambda x - a^2 &= 0 \\ \lambda(x^2 + 2ax + y^2) &= a^2 \\ (x^2 + 2ax + a^2) + y^2 &= \frac{a^2}{\lambda} + a^2 \\ (x+a)^2 + y^2 &= a^2\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

lo cual representa un círculo con centro en el punto $(-a, 0)$ y radio igual a $\sqrt{a^2\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)}$ si:

$$1 + \frac{1}{\lambda} > 0\,, \quad \lambda \neq 0$$

donde:

$$1 + \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda + 1}{\lambda} > 0 \quad \text{si:} \quad \begin{cases} \lambda + 1 > 0 \quad \text{y} \quad \lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 0 \\ \text{ó} \\ \lambda + 1 < 0 \quad \text{y} \quad \lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda < -1 \end{cases}$$

Así, tenemos que si $\lambda \notin [-1, 0]$ la ecuación $\lambda x^2 + \lambda y^2 + 2a\lambda x + a^2 = 0$ representa una circunferencia centrada en $(-a, 0)$ y radio $\sqrt{a^2\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)}$.

GA5. *El punto* $P(x, y)$ *dista del punto* $(1, 2)$ *el doble de su distancia al punto* $(3, -4)$. *Determine el lugar geométrico del punto* P.

SOLUCIÓN:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad obtenemos:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4(x-3)^2 + 4(y+4)^2$$

Desarrollando los cuadrados y reduciendo por términos semejantes:

$$3x^2 - 22x + 3y^2 + 36y = -95$$

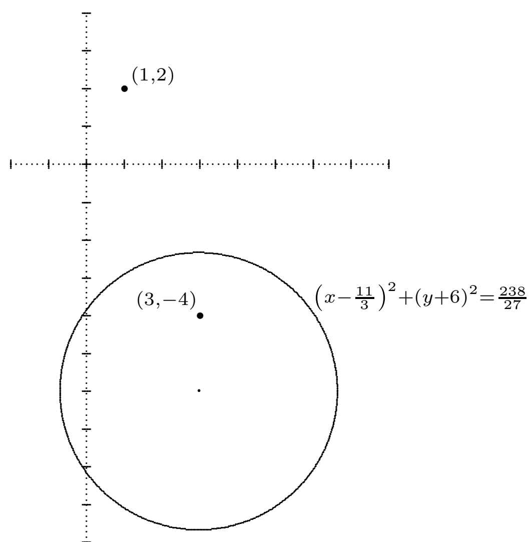
Completando cuadrados:

$$3\left(x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{121}{9}\right) + 3(y^2 + 12y + 36) = -95 + \frac{121}{9} + 108 = \frac{238}{9}$$

De donde obtenemos

$$\left(x - \frac{11}{3}\right)^2 + (y+6)^2 = \frac{238}{27}$$

Así, el lugar geométrico del punto P es un círculo con centro en $C\left(\frac{11}{3}, -6\right)$ y radio $r = \frac{\sqrt{238}}{3\sqrt{3}}$.



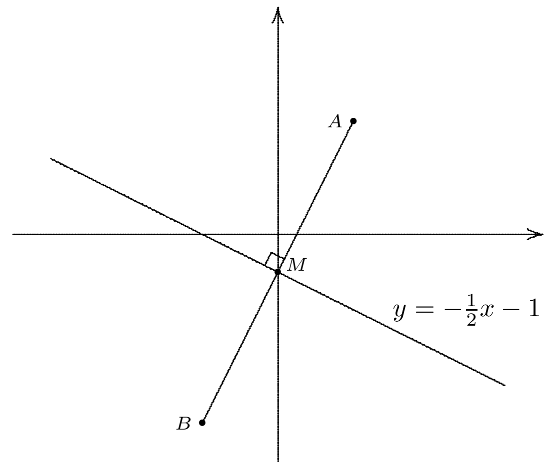
GA7. *Dados los extremos del segmento formado por los puntos* $A(2,3)$ *y* $B(-2,-5)$, *determine la ecuación de la recta mediatriz a este segmento.*

Solución: La mediatriz del segmento AB es la recta que pasa por el punto medio de este segmento y es perpendicular a él. Sea M dicho punto medio y sea m la pendiente del segmento. Tenemos que:

$$M = \left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{3+(-5)}{2}\right) = (0,-1) \qquad \text{y} \qquad m = \frac{3-(-5)}{2-(-2)} = \frac{8}{4} = 2$$

Luego, la mediatriz del segmento AB es la recta que pasa por el punto $(0,-1)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{2}$:

$$y = -\tfrac{1}{2}x - 1$$



GA9. *Si la pendiente de la recta que une al punto $P(x,y)$ con el punto $(4,-1)$ es $m=5$, encuentra el lugar geométrico del punto P.*

Solución: Por la invariabilidad de la pendiente, sabemos que el lugar geométrico que buscamos es la recta que pasa por el punto $(4,-1)$ y que tiene pendiente $m=5$:

$$y = 5(x-4) - 1 \quad \rightarrow \quad 5x - y - 21 = 0$$

GA11. *Hallar la ecuación de la parábola vertical que pasa por los puntos:* $(0,3)$, $(-1,1)$ y $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$.

Solución: Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tenemos que $f(0)=3$, $f(-1)=1$ y $f(-2)=\frac{1}{2}$. Entonces:

$$f(0) = c \quad \rightarrow \quad c = 3 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = ax^2 + bx + 3$$

Luego:

$$\begin{aligned} f(-1) &= a - b + 3 = 1 && \rightarrow \quad b = a + 2 \\ f(-2) &= 4a - 2b + 3 = \tfrac{1}{2} && \rightarrow \quad b = 2a + \tfrac{5}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$a + 2 = 2a + \tfrac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad a = 2 - \tfrac{5}{4} = \tfrac{3}{4}$$

Como $b = a + 2$ entonces:

$$b = \tfrac{3}{4} + 2 = \tfrac{11}{4}$$

Así, la función cuadrática buscada es:

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(3x^2 + 11x + 12\right)$$

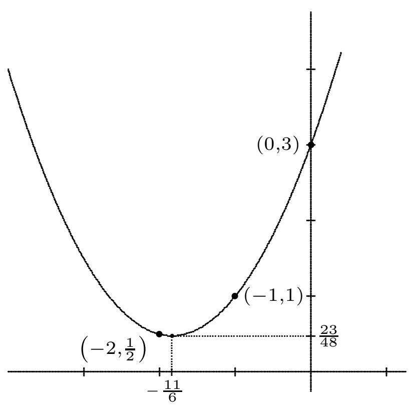
Ahora bien:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}\left(3x^2 + 11x + 12\right) &= \tfrac{3}{4}\left(x^2 + \tfrac{11}{3}x + 4\right) \\
&= \tfrac{3}{4}\left(x^2 + \tfrac{11}{3}x + \left(\tfrac{11}{6}\right)^2 - \left(\tfrac{11}{6}\right)^2 + 4\right) \\
&= \tfrac{3}{4}\left[\left(x^2 + \tfrac{11}{3}x + \left(\tfrac{11}{6}\right)^2\right) - \tfrac{121}{36} + \tfrac{144}{36}\right] \\
&= \tfrac{3}{4}\left[\left(x + \tfrac{11}{6}\right)^2 + \tfrac{23}{36}\right] = \tfrac{3}{4}\left(x + \tfrac{11}{6}\right)^2 + \tfrac{23}{48}
\end{aligned}$$

O sea que:

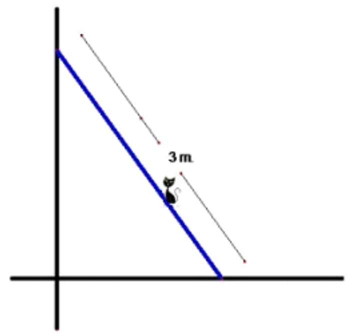
$$f(x) = \frac{3}{4}\left(x + \frac{11}{6}\right)^2 + \frac{23}{48}$$

es decir, tenemos una parábola que abre hacia arriba con vértice en el punto $\left(-\frac{11}{6}, \frac{23}{48}\right)$, la cual no tiene raíces reales:

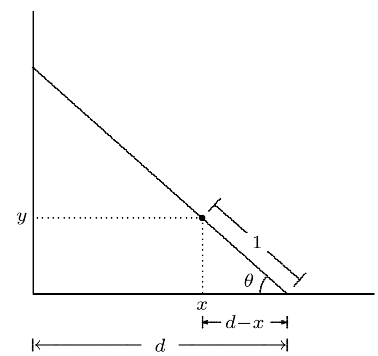


$$\begin{aligned}
f(x) &= \tfrac{1}{4}\left(3x^2 + 11x + 12\right) \\
&= \tfrac{3}{4}\left(x + \tfrac{11}{6}\right)^2 + \tfrac{23}{48}
\end{aligned}$$

GA13. *Una escalera de longitud 3 metros se encuentra recargada en una pared. Un gato está subido en un escalón que se encuentra a un metro del extremo inferior de la escalera. Si la escalera se desliza sin que se despegue de la pared ni del piso. Determina el lugar geométrico que describe la trayectoria que sigue el gato si no se mueve del escalón mencionado. (Ver la siguiente figura).*



SOLUCIÓN:



- Sea el punto (x, y) la posición del gato.
- Sea $d \in [0, 3]$ la distancia de la pared al extremo inferior de la escalera.
- Sea θ el ángulo que se forma entre la escalera y el suelo.

Con respecto al triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la escalera, la cual mide 3m, tenemos que

$$\cos\theta = \frac{d}{3} \qquad \text{de donde} \qquad d = 3\cos\theta \tag{14}$$

Ahora bien, si consideramos el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 1m, tenemos que

$$\cos\theta = \frac{d-x}{1} \qquad \text{de donde} \quad x = d - \cos\theta \tag{15}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{1} \qquad \text{de donde} \quad y = \operatorname{sen}\theta \tag{16}$$

Sustituyendo (1) en (2) obtenemos

$$x = 3\cos\theta - \cos\theta = 2\cos\theta \qquad \text{y por lo tanto} \qquad \cos\theta = \frac{x}{2}$$

Elevando ambos miembros de la ecuación al cuadrado y sustituyendo $\cos^2\theta$ por $1 - \operatorname{sen}^2\theta$ nos queda que

$$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \frac{x^2}{4}$$

de donde

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{x^2}{4} \qquad \text{y por lo tanto} \qquad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

Sustituyendo en (3) obtenemos

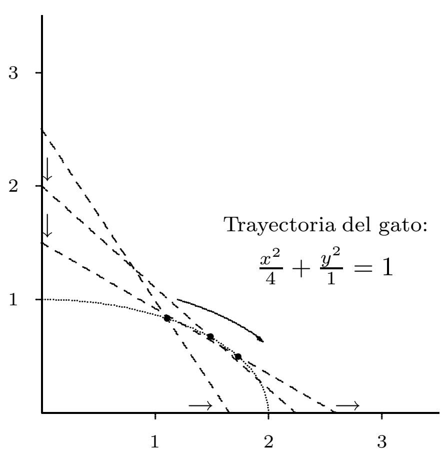
$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \qquad \text{de donde} \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

ecuación que corresponde a una elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a = 2$ ($2a$ es la longitud del eje horizontal), $b = 1$ ($2b$ es la longitud del eje vertical) y centrada en el origen.

Por lo tanto, la trayectoria que al irse resbalando la escalera describe la posición (fija) en ella del gato, en el punto (x, y), es un arco de 90 grados de esta elipse en el primer cuadrante, como se muestra en la siguiente figura:



Cabe aclarar que el punto $(x, y) = (0, 1)$ hipotéticamente sería la posición del gato sobre la escalera cuando esta estuviera completamente vertical contra la pared; y el punto $(x, y) = (2, 0)$ sería dicha posición cuando la escalera ya se hubiera resbalado completamente y quedara horizontal sobre el suelo.

GA15. *Dos de los vértices de un triángulo son los puntos $A(-1,3)$ y $B(5,1)$:*

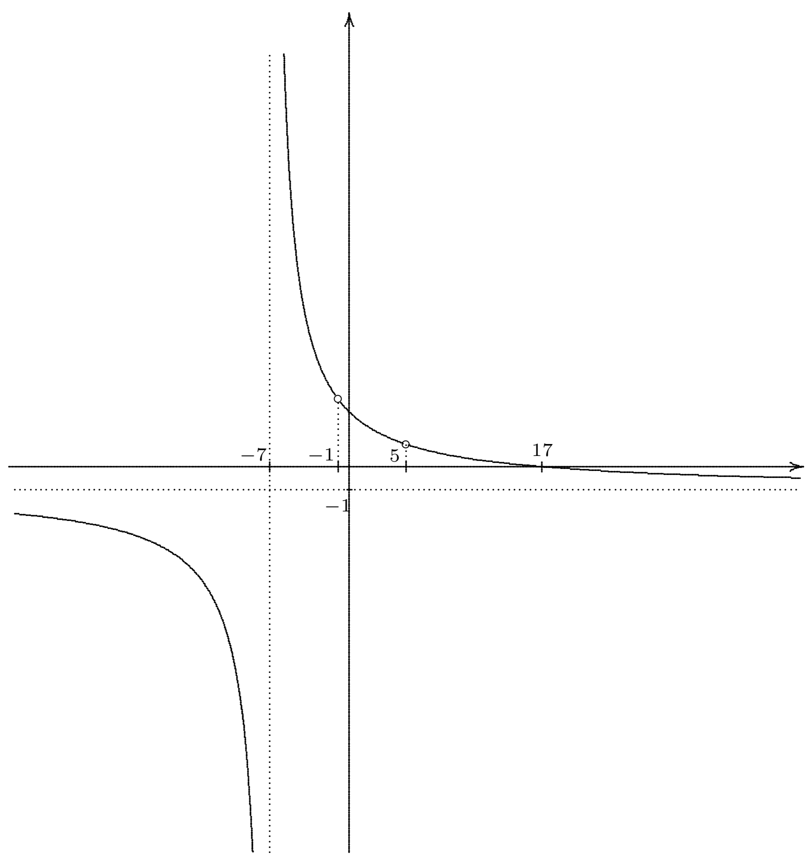
a) *Hallar la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice C si se mueve de tal manera que la pendiente del lado AC siempre es el doble de la pendiente del lado BC.*

b) *Bosqueja su gráfica.*

SOLUCIÓN: Sea m_1 la pendiente del lado AC y m_2 la pendiente del lado BC con $C(x,y)$ tal que $m_1 = 2m_2$. Tenemos entonces que:

$$m_1 = \frac{y-3}{x+1} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{y-1}{x-5} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-3}{x+1} = 2\left(\frac{y-1}{x-5}\right), \quad x \neq -1, x \neq 5$$

$$\Rightarrow \quad (y-3)(x-5) = 2(y-1)(x+1) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{17-x}{x+7}, \quad x \notin \{-7,-1,5\}$$



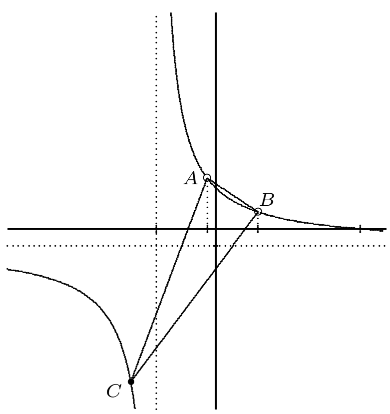
Esta gráfica es el lugar geométrico de los puntos $C(x,y)$, los cuales son de la forma $\left(x, \frac{17-x}{x+7}\right)$ para x diferente de -7, -1 y 5. Siendo C cualquier punto sobre la gráfica el tercer vértice del triángulo, se cumple que la pendiente m_1 del lado AC siempre es el doble de la pendiente m_2 del lado BC. Veamos los siguientes ejemplos. Si el vértice C es el punto $C(-10,-9)$, el cual es un punto sobre la gráfica, tenemos que m_1 y m_2 son:

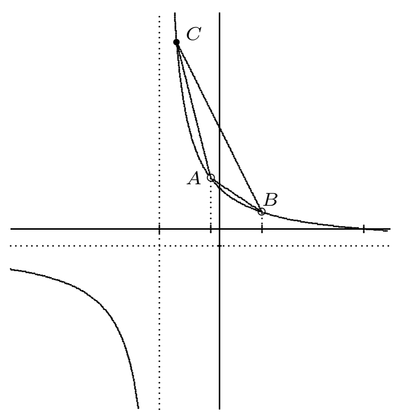
$$m_2 = \frac{-9-1}{-10-5} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad m_1 = \frac{-9-3}{-10+1} = \frac{4}{3} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot m_2$$

$(-5,11)$ es otro punto sobre la gráfica, si lo tomamos como el vértice C tenemos que:

$$m_2 = \frac{11-1}{-5-5} = -1 \quad \text{y} \quad m_1 = \frac{11-3}{-5+1} = -2 = 2 \cdot (-1) = 2 \cdot m_2$$

es decir, en ambos casos, la pendiente del lado AC es el doble de la pendiente del lado BC.





GA17. *Determine la ecuación de una parábola vertical que corte al eje X en $x=-7$ y $x=3$. Además, encuentre el vértice de la parábola que construyó.*

SOLUCIÓN:

Tenemos que $y = A(x+7)(x-3)$ es la ecuación que representa la familia de parábolas cuyas raíces son $x=-7$ y $x=3$. Entonces

$$y = A(x^2+4x-21) = A(x^2+4x+4-4-21) = A(x+2)^2 - 25A$$

Luego, el vértice de cada una de estas parábolas es: $V(-2,-25A)$, $\forall A \in \mathbb{R}$.

GA19. *Determine la ecuación de la recta tangente en el punto* $(0, 5.24)$ *a la circunferencia cuyo centro se encuentra en el punto* $(2, 3)$.

SOLUCIÓN: Tenemos que $5.24 = \frac{524}{100} = \frac{131\times 4}{24\times 4} = \frac{131}{25}$. La circunferencia pasa por el punto $(0, 5.24) = \left(0, \frac{131}{25}\right)$, luego, su radio es la distancia de este punto a su centro, que es el punto $(2, 3)$:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(0-2)^2 + \left(\tfrac{131}{25} - 3\right)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{2}{1}\right)^2 + \left(\tfrac{131-75}{25}\right)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{50}{25}\right)^2 + \left(\tfrac{56}{25}\right)^2} \\ &= \sqrt{\tfrac{2500}{25^2} + \tfrac{3136}{25^2}} = \sqrt{\tfrac{5636}{25^2}} \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que la ecuación de la circunferencia es:

$$y = \sqrt{r^2 - (x-2)^2} + 3 \quad \text{por lo tanto:} \quad y' = \frac{x-2}{\sqrt{r^2-(x-2)^2}}$$

Luego, la pendiente de la recta tangente en el punto $\left(0, \frac{131}{25}\right)$, es:

$$y'(0) = -\frac{2}{\sqrt{r^2-4}} = -\frac{2}{\sqrt{\frac{5636}{25^2}-4}} = -\frac{2}{\sqrt{\frac{3136}{25^2}}} = -\frac{2}{\frac{56}{25}} = -\frac{50}{56} = -\frac{25}{28}$$

Así, esta recta tangente tiene ecuación:

$$y = -\frac{25}{28}x + \frac{131}{25}$$

GA21. *Determine el lugar geométrico del punto que se mueve de forma tal que la suma de sus distancias a los puntos* $(-3, 0)$ *y* $(3, 0)$ *sea* 8.

SOLUCIÓN: Sea $P(x, y)$ un punto tal que la suma de sus distancias a los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ es 8. Tenemos entonces que:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=8\\
\rightarrow\quad &\sqrt{(x+3)^2+y^2}=8-\sqrt{(x-3)^2+y^2}\\
\rightarrow\quad &\left[\sqrt{(x+3)^2+y^2}\right]^2=\left[8-\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right]^2\\
\rightarrow\quad &(x+3)^2+\cancel{y^2}=64-16\sqrt{(x-3)^2+y^2}+(x-3)^2+\cancel{y^2}\\
\rightarrow\quad &(x+3)^2-(x-3)^2=16\cdot\left[4-\sqrt{(x-3)^2+y^2}\,\right]\\
\rightarrow\quad &\frac{12x}{16}=4-\sqrt{(x-3)^2+y^2}\quad\rightarrow\quad\sqrt{(x-3)^2+y^2}=4-\frac{3x}{4}\\
\rightarrow\quad &\left[\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right]^2=\left[4-\frac{3x}{4}\right]^2\\
\rightarrow\quad &(x-3)^2+y^2=16-8\cdot\left(\frac{3x}{4}\right)+\frac{9x^2}{16}\\
\rightarrow\quad &x^2-\cancel{6x}+9+y^2=16-\cancel{6x}+\frac{9x^2}{16}
\end{aligned}
$$

De donde obtenemos:

$$x^2-\frac{9x^2}{16}+y^2=16-9=7$$

por lo tanto:

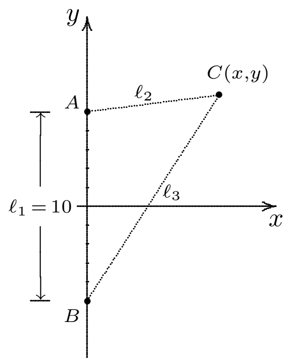
$$\frac{1}{7}\left[\frac{7x^2}{16}+y^2\right]=1\quad\rightarrow\quad\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$$

Esta ecuación corresponde a una elipse centrada en el origen con $a=4$ y $b=\sqrt{7}$, cuyos focos son los puntos $(-3,0)$ y $(3,0)$, o sea que $c=3$. Podemos corroborar que la longitud del lado mayor es la suma de las distancias de un punto de la elipse a los focos, a saber 8, y que $a^2=b^2+c^2$:

$$2a=2(4)=8\quad\text{y}\quad b^2+c^2=7+9=16=a^2$$

GA23. *El perímetro de un triángulo es 30, y los puntos $A(0\,,5)$ y $B(0\,,-5)$ son dos de sus vértices. Encuentre el lugar geométrico del tercer vértice.*

SOLUCIÓN: Sea $C(x,y)$ el tercer vértice del triángulo con ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 las longitudes de sus lados, tales que:



$$\ell_1 = \overline{AB} = 10$$
$$\ell_2 = \overline{AC}$$
$$\ell_3 = \overline{BC}$$

Sabemos que $\ell_1 = 10$ y que el perímetro es 30, luego:

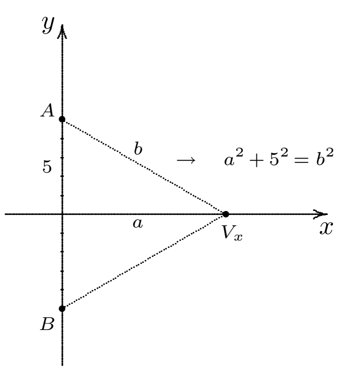
$$\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 30$$

entonces $\ell_2 + \ell_3 = 20$.

Lo que queremos encontrar es el lugar geométrico de los puntos $C(x,y)$ tales que la suma de las distancias de C a A y de C a B (A y B dos puntos fijos) es una constante, a saber, 20. Los puntos A y B, ambos sobre el eje Y, equidistan del origen. Luego, se trata de una elipse centrada en el origen cuyos focos son los vértices del triángulo, es decir, los puntos A y B tales que $\overline{AC} + \overline{BC} = 20$, C un punto de la elipse.

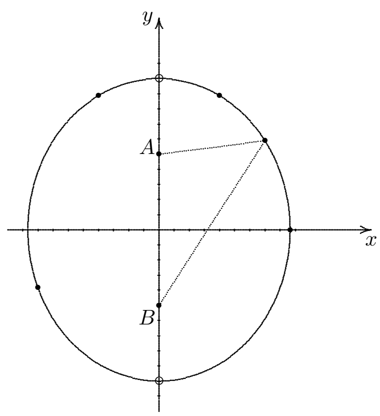
Sea $V_y(0,b)$ la intersección de la elipse con el eje Y. La suma de las distancias de este punto a los focos debe ser 20. Entonces:

$$(b-5) + (b-(-5)) = 2b = 20 \quad \rightarrow \quad b = 10$$



Sea $V_x(a,0)$ la intersección de la elipse con el eje X. Tenemos que $\overline{V_xA} = \overline{V_xB}$. Como $\overline{V_xA} + \overline{V_xB} = 20$, entonces $\overline{V_xA} = 10$, por lo tanto:

$$a^2 + 25 = 100 \quad \rightarrow \quad a^2 = 75 \quad \therefore \quad a = 5\sqrt{3}$$



Tenemos entonces que la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{(5\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$$

El lugar geométrico de los puntos $C(x, y)$, tercer vértice del triángulo, es esta elipse, excepto los puntos $V_y(0, \pm b)$ que son colineales con los otros dos vértices.

III. Cálculo

C1. *Hacer un bosquejo de la gráfica de la función* $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ *determinando sus raíces, sus puntos mínimos y máximos, los intervalos donde la función es creciente, donde es decreciente, donde es cóncava hacia abajo y donde es cóncava hacia arriba.*

SOLUCIÓN: El dominio de la función es $D_f = \mathbb{R}$. Para determinar sus raíces necesitamos factorizar la expresión algebraica de f:

$$2x^3 + 3x^2 - 12x = x(2x^2 + 3x - 12) \tag{17}$$

donde una raíz es $r_1 = 0$ y las otras dos son las raíces de la expresión cuadrática en (17):

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-12)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{4} = \begin{cases} r_2 = 1.812 \\ r_3 = -3.312 \end{cases}$$

Para determinar sus puntos máximos y mínimos, buscamos las raíces de $f'(x)$:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1) = 0$$

por lo tanto, los puntos críticos son:

$$x_1 = -2 \quad \text{y} \quad x_2 = 1$$

Ahora bien, tenemos que:

$$\begin{array}{llcll} f''(x) = 12x + 6 \quad \text{con:} & f''(-2) < 0 & \rightarrow & x_1 = -2 & \text{es un máximo} \\ & f''(1) > 0 & \rightarrow & x_2 = 1 & \text{es un mínimo} \end{array}$$

Para encontrar los intervalos de monotonía, tenemos que la función es creciente en los intervalos donde la derivada es positiva y es decreciente cuando la derivada es negativa:

$$f'(x) = 6(x+2)(x-1)$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$(-)(-) > 0$	$(+)(-) < 0$	$(+)(+) > 0$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Nota: Aquí corroboramos que $x_1 = -2$ es un máximo pues hasta este punto la función es creciente y después decrece; igualmente corroboramos que $x_1 = 1$ es un mínimo pues desde $x = -2$ y hasta este punto la función es decreciente y después crece.

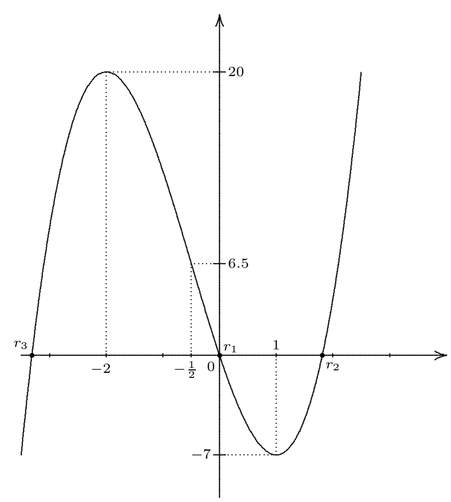
Por último, para encontrar los intervalos de concavidad, tenemos que la función es cóncava hacia arriba en los intervalos donde la segunda derivada es positiva y es cóncava hacia abajo cuando la segunda derivada es negativa:

$$f''(x) = 12x + 6 = 12\left(x + \tfrac{1}{2}\right)$$

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$
$f''(x)$	$(-)$	$(+)$
$f(x)$	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

Finalmente, evaluamos la función en los puntos clave y, con toda la información que hemos encontrado, esbozamos la gráfica:

x	$f(x)$
-3.312	0
-2	20
$-\frac{1}{2}$	6.5
0	0
1	-7
1.812	0



C3. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

SOLUCIÓN: Como el límite es de la forma $\frac{0}{0}$, podemos emplear el recurso de la regla de L'Höpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x(-\operatorname{sen} x) + \cos x - \cos x}{3x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{3x}$$

Como este último límite también queda de la forma $\frac{0}{0}$, volvemos a aplicar la regla de L'Höpital:

$$-\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{3x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{3} = \frac{1}{3}$$

C5. *Hallar la derivada de la función:*

$$f(x) = \int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3(t)\, dt$$

SOLUCIÓN: Por el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos que:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt \right)' = f[h(x)] \cdot h'(x) - f[g(x)] \cdot g'(x)$$

En este caso, $g(x) = a$ por lo que $g'(x) = 0$. Luego:

$$f\,'(x) = \left(\int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3(t)\, dt \right)' = 3x^2 \operatorname{sen}^3(x^3)$$

C7. *a)* $g(x) = x^x, \quad x > 0$

SOLUCIÓN: Tenemos que: $\ln[g(x)] = x \cdot \ln x$. Entonces:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x \quad \rightarrow \quad g'(x) = g(x) \cdot (1 + \ln x)$$
$$\rightarrow \quad g'(x) = x^x(1 + \ln x)$$

b) $g(t) = \left(\ln(t^2+1)\right)^2$

SOLUCIÓN: $g'(t) = 2 \cdot \ln(t^2+1) \cdot \dfrac{2t}{t^2+1} = \dfrac{4t\ln(t^2+1)}{t^2+1}$

c) $\quad h(t) = (t+1)^t$

SOLUCIÓN: Tenemos que $(t+1)^t = [e^{\ln(t+1)}]^t = e^{t\cdot\ln(t+1)}$, por lo tanto:

$$u'(t) = \tfrac{d}{dt}(t+1)^t = \tfrac{d}{dt}\left(e^{t\cdot\ln(t+1)}\right) = e^{t\cdot\ln(t+1)}\cdot\tfrac{d}{dt}\left(t\cdot\ln(t+1)\right)$$

$$= e^{t\cdot\ln(t+1)}\cdot\left(t\cdot\tfrac{1}{t+1}+\ln(t+1)\right) = (t+1)^t\cdot\left(t\cdot\tfrac{1}{t+1}+\ln(t+1)\right)$$

$$\therefore \qquad u'(t) = (t+1)^t\left[\tfrac{t}{t+1}+\ln(t+1)\right]$$

C9. *Resuelva las siguientes integrales:*

a) $\displaystyle\int x\sec^2(x^2)dx$

Sea $u = x^2$ entonces $du = 2x\,dx$. Luego tenemos que:

$$\int x\sec^2(x^2)dx = \tfrac{1}{2}\textstyle\int\sec^2(x^2)2x\,dx = \tfrac{1}{2}\int\sec^2 u\,du = \tfrac{1}{2}\tan u + C$$

Por lo tanto:

$$\int x\sec^2(x^2)dx = \tfrac{1}{2}\tan(x^2) + C$$

c) $\displaystyle\int_0^1 x^5 e^{-x^2}dx$

Tenemos que:

$$\int_0^1 x^5 e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^4 e^{-x^2}(-2x)dx$$

Vamos a aplicar integración por partes, para lo cual sean:

$$\begin{aligned} u &= x^4 & \rightarrow \quad du &= 4x^3\,dx \\ dv &= e^{-x^2}(-2x)dx & \rightarrow \quad v &= e^{-x^2} \end{aligned}$$

Así obtenemos:

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 x^4 e^{-x^2}(-2x)dx = -\frac{1}{2}\left[x^4 e^{-x^2}\Big|_0^1 - 4\int_0^1 x^3 e^{-x^2}dx\right]$$

$$= -\frac{1}{2e} + 2\int_0^1 x^3 e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2e} - \int_0^1 x^2 e^{-x^2}(-2x)dx$$

Para aplicar nuevamente integración por partes a esta última integral que obtuvimos, ahora definimos:

$$\begin{aligned} u &= x^2 & \rightarrow \quad du &= 2x\,dx \\ dv &= e^{-x^2}(-2x)dx & \rightarrow \quad v &= e^{-x^2} \end{aligned}$$

Con lo que ahora tenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2e} - \int_0^1 x^2 e^{-x^2}(-2x)dx &= -\frac{1}{2e} - x^2 e^{-x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x^2}(-2x)dx \\ &= -\frac{1}{2e} - \frac{1}{e} - e^{-x^2}\Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2e} - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{2e-5}{2e} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 x^5 e^{-x^2} dx = \frac{2e-5}{2e}$$

$e)$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

Sea $u = \operatorname{sen} x$, luego $dx = \cos x\, dx$. Entonces:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} u\, du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}$$

$g)$ $\displaystyle\int x \sec\left(x^2\right) \operatorname{tg}\left(x^2\right) dx$

Sea $u = x^2 \quad \therefore \quad du = 2xdx$. Y consideremos que

$$\sec u = \frac{1}{\cos u} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}.$$

Tenemos entonces que

$$\int x \sec\left(x^2\right) \operatorname{tg}\left(x^2\right) dx = \frac{1}{2}\int (\cos u)^{-2} \operatorname{sen} u du$$

Sea $v = \cos u \quad \therefore \quad dv = -\operatorname{sen} u du$. Luego:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int (\cos u)^{-2} \operatorname{sen} u du &= -\frac{1}{2}\int v^{-2} dv \\ &= \frac{1}{2}v^{-1} + C = \frac{1}{2}\sec\left(x^2\right) + C \end{aligned}$$

i) $\displaystyle\int \frac{1-t}{t+1}\,dt$

Sea:

$$t+1=u \quad \rightarrow \quad dt=du$$

y tenemos entonces que $1-t=2-u$. Luego:

$$\int \frac{1-t}{t+1}\,dt = \int \frac{2-u}{u}\,du = 2\int \frac{du}{u} - \int du$$
$$= 2{\cdot}\ln(u) - u = \ln(t+1)^2 - (t+1) + C$$

k) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x dx$

Para aplicar integración por partes, sean $u_1 = e^x$ y $dv_1 = \operatorname{sen} x dx$, entonces

$$du_1 = e^x dx \quad \text{y} \quad v_1 = -\cos x$$

Luego, tenemos que

$$\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x dx = -e^x \cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$$

Para la integral que queda del lado derecho, volvemos a integrar por partes:

$$u_2 = e^x \text{ y } dv_2 = \cos x dx \quad \text{entonces} \quad du_2 = e^x dx \text{ y } v_2 = \operatorname{sen} x$$

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x dx$$

Así tenemos que

$$\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x dx$$

de donde

$$2\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)\Big|_0^{\pi}$$

por lo tanto

$$\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)\Big|_0^{\pi} = \tfrac{1}{2}(e^{\pi}+1)$$

m) $\displaystyle\int_0^{\pi} 2\operatorname{sen}^2 x dx$

$$\int_0^{\pi} 2\operatorname{sen}^2 x dx = 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x\, dx$$

Vamos a aplicar integración por partes:

$$u = \operatorname{sen} x \ \rightarrow \ du = \cos x\, dx \quad \text{y} \quad dv = \operatorname{sen} x\, dx \ \rightarrow \ v = -\cos x$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x dx &= -\operatorname{sen} x \cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx \\
&= 0 + \int_0^{\pi} (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx \\
&= \int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x dx = \int_0^{\pi} dx = x\Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$\therefore \quad 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \pi$$

ñ) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2 + 5}$

Sea: $\sqrt{3}x = \sqrt{5}u$. Tenemos entonces que $dx = \sqrt{\frac{5}{3}}du$ y también tenemos que $3x^2 = 5u^2$. Por lo tanto:

$$\int \frac{dx}{3x^2 + 5} = \sqrt{\tfrac{5}{3}} \int \frac{du}{5u^2 + 5} = \sqrt{\tfrac{1}{15}} \int \frac{du}{u^2 + 1}$$

Vamos a hacer otro cambio de variable. Sea:

$$u = \tan\theta \quad \rightarrow \quad du = \sec^2\theta\, d\theta$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{\tfrac{1}{15}} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \sqrt{\tfrac{1}{15}} \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan^2\theta + 1} = \sqrt{\tfrac{1}{15}} \int \frac{\cancel{\sec^2\theta}\, d\theta}{\cancel{\sec^2\theta}} = \sqrt{\tfrac{1}{15}} \int d\theta = \frac{\theta}{\sqrt{15}}$$

Y tenemos que:

$$\frac{\theta}{\sqrt{15}} = \frac{\arctan u}{\sqrt{15}} = \frac{\arctan\left[\sqrt{\frac{3}{5}}\,x\right]}{\sqrt{15}}$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{dx}{3x^2+5} = \tfrac{1}{\sqrt{15}} \cdot \arctan\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\,x\right) + C$$

p) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x\sec^2(x^2)\tan(x^2)\,dx$

Sea $u = \sec(x^2)$ y, por lo tanto, $du = 2x \cdot \sec(x^2)\tan(x^2)\,dx$. Tenemos entonces que:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x\sec^2(x^2)\tan(x^2)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \sec(x^2)\cdot 2x\sec(x^2)\tan(x^2)\,dx$$

$$= \int_1^2 u\,du = \tfrac{u^2}{2}\Big|_1^2 = 2 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}$$

C11. *El valor promedio de una función en un intervalo* $[a,b]$ *es:*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

a) *Encuentre el valor promedio de* $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ *y* $f(x) = x^3$ *en el intervalo* $[0,1]$.

b) *Utilice el patrón inferido del inciso anterior para determinar el valor medio de* $f(x) = x^n$, *para cualquier natural* $n \geq 1$. *Ilustre con un ejemplo gráfico este resultado.*

SOLUCIÓN:

a.1) $f(x) = x, \quad [a,b] = [0,1]$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$a.2)$ $f(x) = x^2, \quad [a,b] = [0,1]$

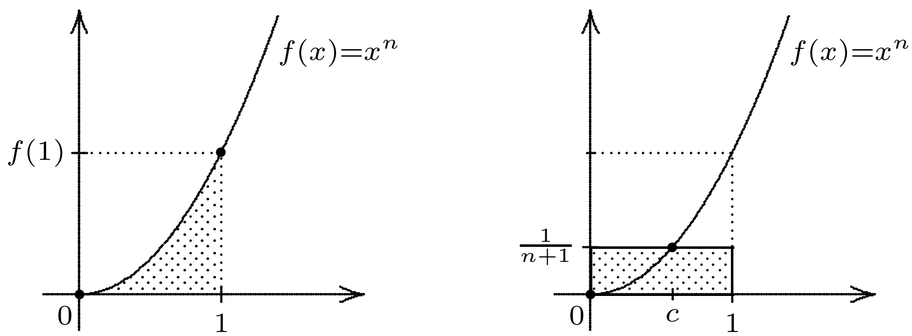
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$a.3)$ $f(x) = x^3, \quad [a,b] = [0,1]$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}$$

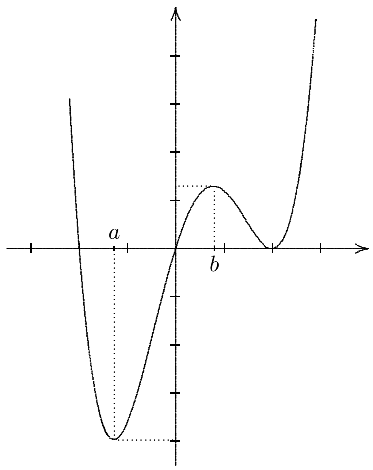
$b)$ $f(x) = x^n,\ n \geq 1, \quad [a,b] = [0,1]$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 x^n\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$



El área bajo la curva (fig. de la izquierda) es igual al área del rectángulo (fig. de la derecha).

C13. *La siguiente gráfica corresponde a la función* $f'(x)$:



Si $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, *contesta las siguientes preguntas:*

a) *¿Para que valores de* x *en el intervalo abierto* $(-3, 3)$ f *tiene un máximo relativo? ¿un mínimo relativo? Justifica.*

b) *¿Para qué valores de* x *es la gráfica de* f *cóncava hacia arriba?*

c) *Si se sabe que* $f(-2) = 0$, *usa este hecho para trazar una posible gráfica de* f.

SOLUCIÓN:

a) Podemos ver que las raíces de $f'(x)$ son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$, las cuales corresponden a los puntos críticos de f. Observemos en la gráfica lo siguiente:

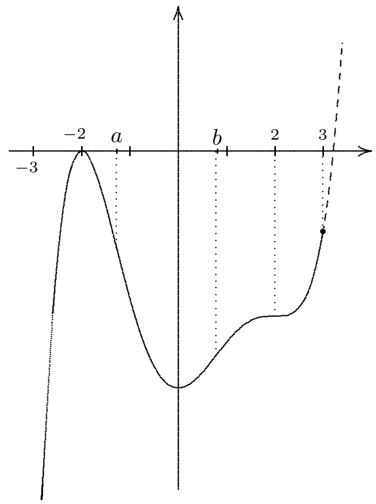
	$(-3, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$
f'	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
f	crece	decrece	crece	crece

Por lo tanto, f tiene un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

b) Tenemos que si f' es creciente, f'' es positiva, luego f es cóncava hacia arriba. Observemos en la gráfica lo siguiente:

	$(-3, a)$	(a, b)	$(b, 2)$	$(2, 3)$
f'	decrece	crece	decrece	crece
f''	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$
f es cóncava hacia:	abajo	arriba	abajo	arriba

c) *Si se sabe que* $f(-2) = 0$, *usa este hecho para trazar una posible gráfica de* f.



Con $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$ y $f(-2) = 0$ tenemos:

i) Un máximo relativo en $x = -2$, un mínimo relativo en $x = 0$ y un punto de inflexión en $x = 2$.

ii) f es cóncava hacia arriba en los intervalos (a, b) y $(2, 3)$ y es cóncava hacia abajo en los intervalos $(-3, a)$ y $(b, 2)$.

C15. *Por el eje X se mueven dos puntos que tienen respectivamente las leyes de movimiento:*

$$x = 24 + t \qquad y \qquad x = \frac{1}{2}t^2$$

con $t \geq 0$. ¿Con qué rapidez se alejarán estos puntos, el uno del otro, en el instante de su encuentro? (x se da en metros, t en segundos)

SOLUCIÓN: La distancia entre los dos puntos en el instante t es:

$$d(t) = \left| \frac{1}{2}t^2 - (24 + t) \right|$$

El momento de su encuentro es cuando esta distancia es igual a cero, entonces:

$$\frac{1}{2}t^2 - (24 + t) = \frac{1}{2}(x + 6)(x - 8) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -6 \quad \text{ó} \quad t = 8$$

Por lo tanto, dado que $t \geq 0$, los puntos se encuentran en el instante $t = 8$. Ahora bien, el punto sobre la recta se mueve a una velocidad de $1\, m/s$ y el otro punto a una velocidad $v(t) = t$. Luego, estos puntos se alejan, el uno del otro, con una rapidez de $d'(t) = |t - 1|$, la cual en el momento de su encuentro es:

$$d'(8) = |8 - 1| = 7\, m/s$$

C17. *Mostrar que:*

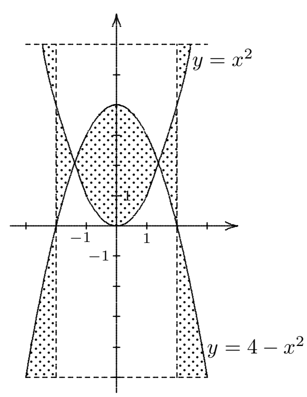
$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \arctan(x+2) + C$$

SOLUCIÓN: Dado que la integral indefinida $\int f(x)\,dx$ representa el conjunto de funciones $F(x)$ tales que $F'(x) = f(x)$, *i.e.* $F(x)$ es una primitiva o antiderivada de $f(x)$, para comprobar que la primitiva de una función es correcta basta con derivar. Para u función de x tenemos que: $\frac{d}{dx}\arctan(u) = \frac{u'}{u^2+1}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big[\arctan(x+2)+C\Big] &= \frac{d}{dx}\arctan(x+2) + \frac{d}{dx}C = \frac{1}{(x+2)^2+1} + 0\\ &= \frac{1}{x^2+4x+4+1} = \frac{1}{x^2+4x+5}\end{aligned}$$

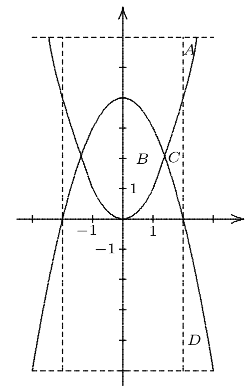
Por lo tanto, hemos comprobado que: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \arctan(x+2) + C.$

C19. *Calcular el área sombreada de la siguiente gráfica:*



SOLUCIÓN: Observemos que el área de la región sombreada es la suma de las áreas de varias regiones cuyos límites son diferentes en cada caso. Pero notemos también que la gráfica es simétrica con respecto al eje Y, por lo que el área que queremos calcular será el doble de la suma de las áreas de las regiones identificadas en la siguiente gráfica con las letras A, B, C y D que a continuación calculamos:

$$A = \int_4^6 \int_2^{\sqrt{y}} dx\, dy = \int_4^6 (\sqrt{y} - 2)dy = \left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - 2y\right)_4^6$$
$$= \frac{2}{3}(6)^{\frac{3}{2}} - 12 - \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} + 8 = 4\sqrt{6} - \frac{28}{3}$$



Para determinar los límites de las regiones B y C necesitamos conocer el punto de intersección de las parábolas:

$$x^2 = 4 - x^2 \quad \rightarrow \quad 2x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x^2 = 2 \quad \rightarrow \quad |x| = \sqrt{2}$$

Por lo tanto:

$$B = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{4-x^2} dy\, dx = \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2)dx = \left(4x - \frac{2x^3}{3}\right)_0^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$C = \int_{\sqrt{2}}^2 \int_{4-x^2}^{x^2} dy\, dx = \int_{\sqrt{2}}^2 (2x^2 - 4)dx = \left(\frac{2x^3}{3} - 4x\right)_{\sqrt{2}}^2 = \frac{8}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

y finalmente:

$$D = \int_{-5}^0 \int_2^{\sqrt{4-y}} dx\, dy = \int_{-5}^0 \left(\sqrt{4-y} - 2\right) dy = \int_{-5}^0 \sqrt{4-y}\, dy - 2\int_{-5}^0 dy$$
$$= -\int_{-5}^0 \sqrt{4-y}\,(-dy) + 2\int_0^5 dy$$
$$= -\frac{2(4-y)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{-5}^0 + 2y\Big|_0^5 = -\frac{16}{3} + 18 + 10 = \frac{68}{3}$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \text{área de la} \\ \text{región sombreada} &= 2(A + B + C + D) \\ &= 2\left(4\sqrt{6} - \frac{28}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{8}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right) + \frac{68}{3}\right) \\ &= \frac{8}{3}\left(3\sqrt{6} + 4\sqrt{2} + 8\right) \approx 56.014\,\mu^2 \end{aligned}$$

C21. *Si en $x = 1$ el polinomio $P(x)$ tiene una raíz múltiple y sabemos que:*

$$P''(x) = 20x^3 - 12x + 4$$

determinar la expresión algebraica de $P(x)$.

SOLUCIÓN: Tenemos que:

$$P'(x) = \int P''(x)dx = \int (20x^3 - 12x + 4)dx = 5x^4 - 6x^2 + 4x + C_1$$
$$P(x) = \int P'(x)dx = \int (5x^4 - 6x^2 + 4x + C_1)dx = x^5 - 2x^3 + 2x^2 + C_1x + C_2$$

Sabemos que $P(1) = 0$, entonces:

$$1 - 2 + 2 + C_1 + C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 + C_2 = -1 \tag{18}$$

Ahora bien, siendo $x = 1$ raíz múltiple del polinomio, $(x-1)^n$, con $n \geq 2$, es factor de $P(x)$ con lo que podemos asegurar que al menos $(x-1)^2$ divide exactamente a $P(x)$, es decir, que al efectuar la división:

$$\frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1}$$

el residuo será cero. Vamos a realizar dicha división:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 2x^2 + x + 2 \\ \hline
x^2 - 2x + 1 & \cancel{x^5} + 0x^4 - 2x^3 + 2x^2 + C_1x + C_2 \\
 & \underline{-\cancel{x^5} + 2x^4 - x^3} \\
 & \qquad \cancel{2x^4} - 3x^3 + 2x^2 \\
 & \qquad \underline{-\cancel{2x^4} + 4x^3 - 2x^2} \\
 & \qquad\qquad \cancel{x^3} + 0x^2 + C_1x \\
 & \qquad\qquad \underline{-\cancel{x^3} + 2x^2 - x} \\
 & \qquad\qquad\qquad \cancel{2x^2} + (C_1 - 1)x + C_2 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{-\cancel{2x^2} + 4x - 2} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad (C_1 + 3)x + (C_2 - 2)
\end{array}
$$

Como mencionamos, este residuo debe ser cero, es decir:

$$(C_1+3)x+(C_2-2)=0\,x+0$$

lo que implica que:

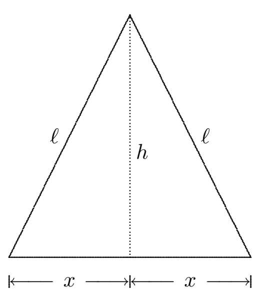
$$C_1+3=0 \quad\rightarrow\quad C_1=-3 \qquad \text{y} \qquad C_2-2=0 \quad\rightarrow\quad C_2=2$$

Observemos que $C_1+C_2=-3+2=-1$, o sea que se cumple la condición que obtuvimos en (18). Luego:

$$P(x)=x^5-2x^3+2x^2-3x+2$$

C23. *Demostrar que de todos los triángulos isósceles de perímetro $P>0$ dado, el equilátero es el de mayor área.*

SOLUCIÓN:



El área del triángulo es: $A=\frac{b\times h}{2}$ donde:

$$b=2x \qquad \text{y} \qquad h=\sqrt{\ell^2-x^2}$$

Por lo tanto:

$$A(x)=\frac{2x\sqrt{\ell^2-x^2}}{2}=x\sqrt{\ell^2-x^2} \tag{19}$$

Por otro lado, dado el perímetro P tenemos que:

$$2\ell+2x=P \quad\rightarrow\quad \ell+x=\frac{P}{2} \quad\rightarrow\quad \ell=\frac{P}{2}-x$$

lo cual vamos a sustituir en (19):

$$A(x)=x\sqrt{\left(\frac{P}{2}-x\right)^2-x^2}=x\sqrt{\frac{P^2}{4}-Px+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}=\sqrt{\frac{P^2}{4}x^2-Px^3}$$

$$\therefore \quad A'(x)=\frac{\frac{P^2}{2}x-3Px^2}{2\sqrt{\frac{P^2}{4}x^2-Px^3}}=\frac{Px(P-6x)}{4x\sqrt{\frac{P(P-4x)}{4}}}=\frac{\sqrt{P}(P-6x)}{2\sqrt{P-4x}}$$

Igualamos a cero la derivada y obtenemos:

$$\frac{\sqrt{P}(P-6x)}{2\sqrt{P-4x}}=0 \quad\rightarrow\quad \sqrt{P}(P-6x)=0 \quad\rightarrow\quad P-6x=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{P}{6}$$

Ahora bien, observemos que:

$x < \frac{P}{6}$	$x > \frac{P}{6}$
$\rightarrow\ A'(x) > 0$	$\rightarrow\ A'(x) < 0$
$\therefore\ A(x)$ crece	$\therefore\ A(x)$ decrece

$$\Rightarrow\ x = \tfrac{P}{6} \text{ es un } \textit{máximo} \text{ de } A(x).$$

Luego, $b = 2x = \frac{P}{3}$ y tenemos que:

$$2\ell + 2x = P \quad \rightarrow \quad 2\ell + \frac{P}{3} = P \quad \rightarrow \quad \ell = \frac{P}{3} \quad \rightarrow \quad b = \ell$$

por lo tanto, el triángulo de mayor área es equilátero. Con esto mostramos que de todos los triángulos isósceles de perímetro $P > 0$ dado, el de mayor área es equilátero.

C25. *¿Qué ángulos forman con el eje de las abscisas, al cortarse con éste en el origen las sinusoides:*

a) $y = \operatorname{sen} x$ *b*) $y = \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$

SOLUCIÓN:

a) $y = \operatorname{sen} x$

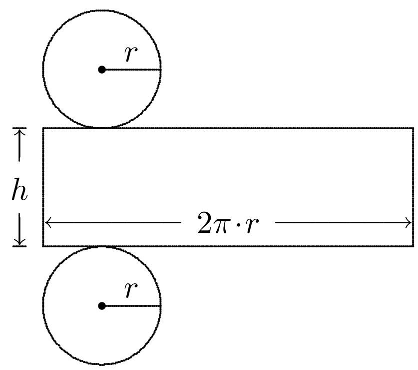
Sea θ el ángulo que buscamos. Tenemos que $\operatorname{sen} x$ corta al eje X en $x = 0$ y como $y' = \cos x$ con $y'(0) = 1$, entonces la recta tangente a la función $y = \operatorname{sen} x$ tiene pendiente $m = 1$. Esto significa que $\tan\theta = 1$ y, por lo tanto, $\theta = 45°$.

b) $y = \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$

Sea θ el ángulo que buscamos. Tenemos que $\operatorname{sen}\sqrt{3}x$ corta al eje X en $x = 0$ y como $y' = \sqrt{3}\cos x$ con $y'(0) = \sqrt{3}$, entonces la recta tangente a la función $y = \sqrt{3}\operatorname{sen} x$ tiene pendiente $m = \sqrt{3}$. Esto significa que $\tan\theta = \sqrt{3}$ y, por lo tanto, $\theta = 60°$.

C27. *De todos los cilindros circulares rectos que tienen un volumen V_0 dado, determinar el de menor superficie: ¿cuál es la relación entre el diámetro de la base y la altura de tal cilindro?*

SOLUCIÓN:



El área del cilindro es:

$$A = 2\pi\cdot r^2 + 2\pi rh$$

y tenemos que el volumen V_0 está dado por:

$$V_0 = \pi\cdot r^2 h \quad \rightarrow \quad h = \frac{V_0}{\pi\cdot r^2} \tag{20}$$

Por lo tanto, la superficie del cilindro, cuyo volumen es V_0, está dada por:

$$A(r) = 2\pi\cdot r^2 + 2\pi\cdot r\frac{V_0}{\pi\cdot r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}$$

Esta superficie es la que queremos sea mínima. Vamos a calcular la derivada de $A(r)$:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V_0}{r^2}$$

Buscamos los puntos donde se anula esta derivada:

$$A'(r) = 0 \quad \rightarrow \quad 4\pi r = \frac{2V_0}{r^2} \quad \rightarrow \quad r^3 = \frac{V_0}{2\pi} \tag{21}$$

Tenemos entonces que el único punto crítico es:

$$r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$$

Usando el criterio de la segunda derivada:

$$A''(r) = 4\pi + \frac{4V_0}{r^3} \stackrel{(21)}{=} 4\pi + \frac{4V_0}{\frac{V_0}{2\pi}} = 4\pi + \frac{8\pi\cancel{V_0}}{\cancel{V_0}} = 12\pi > 0$$

$$\therefore \qquad r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}} \text{ es un mínimo de la función } A(r)$$

Ahora bien, vamos a calcular la razón $\frac{h}{r}$ para ver la relación entre la altura h y el radio para el cual la superficie del cilindro es mínima, a saber, $r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$.

$$\frac{h}{r} \overset{(20)}{=} \frac{\frac{V_0}{\pi \cdot r^2}}{r} = \frac{V_0}{\pi \cdot r^3} \overset{(21)}{=} = \frac{V_0}{\pi \cdot \frac{V_0}{2\pi}} = \frac{2\pi V_0}{\pi V_0} = 2$$

$$\text{O sea que:} \quad \frac{h}{r} = 2 \quad \rightarrow \quad h = 2r$$

Es decir, de todos los cilindros con un volumen V_0 dado, la superficie de dicho cilindro es mínima cuando la altura del cilindro y el diámetro de la base son iguales.

BIBLIOGRAFÍA

Ahlfors, L. (1979). *Complex Analysis.* USA: McGraw-Hill.

Apostol, T. (1980). *Calculus* (F. Vélez, trad.). Barcelona, España: Reverté.

Blank, A. (1976). *Problemas de Cálculo y Análisis Matemático* (R. Vinos, trad.). México: Limusa.

Canavos, G. (1989). *Probabilidad y Estadística, Aplicaciones y Métodos* (E. G. Urbina, trad.). México: McGraw-Hill.

Cárdenas, H. & Lluis, E., et. al. (1978). *Álgebra Superior.* México: Ed. Trillas.

Courant, R. & John, F. (1979). *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático.* México: Limusa.

Grossman, S. (1980). *Elementary Linear Algebra.* USA: Wadsworth Publishing Company.

Florey, F. (1988). *Fundamentos de Álgebra Lineal y aplicaciones* (L. Scarpetta, trad.). México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Haaser, N. & LaSalle, J. & Sullivan, J. (1982). *Análisis Matemético* (F. Velasco, trad.). México: Trillas.

Hoffman, L. (1985). *Cálculo Aplicado para Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales* (M. Soler, trad.). México: McGraw-Hill.

Lehmann, Ch. (1980). *Geometría Analítica* (R. García, trad.). México: Limusa.

Leithold, L. (1973). *El Cálculo con Geometría Analítica* (M. De Garay, R. Su & C. Rincón, trad.). México: Harla.

Lugo, M. & Rodríguez, C. (1977). *Matemáticas IV. Introducción al Concepto de Derivada.* México: Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH-Sur).

Máltsev, A. I. (1972). *Fundamentos de Álgebra Lineal* (C. Vega, trad.). URSS: Editorial Mir.

Piskunov, N. (1978). *Cálculo Diferencial e Integral* (K. Medkov, trad.). URSS: Editorial Mir.

Preston, G. & Lovaglia, A. (1971). *Modern Analytic Geometry.* USA: Harper & Row.

Spivak, M. (1978). *Cálculo Infinitesimal* (B. Frontera, trad.). Barcelona, España: Reverté.

Thomas, G. & Finney, R. (1992). *Calculus and Analytic Geometry.* USA: Adisson-Wesley.