Revista del Seminario
de
Enseñanza y Titulación

Año IV E8

Cajori F.,

Historia de los Argumentos de Zenón sobre el Movimiento

Octubre 1987

Florian Cajori

Historia de los agrumentos de Zenón sobre el movimiento

Fase en el desarrollo de la teoría de límites*

Traducción: Eliza Zacarías
Revisión de la Traducción: Ana Elena Ferrer y Jefferson King.
México, 1987
Título original: *The History of Zeno's Arguments on Motion: Phases in the Development of the Theory of Limits.*

Publicado en: *American Mathematical Monthly,* Vol. XXII, 1915, pp. 1-6, 39-47, 109-115, 143-149, 179-186, 215-220, 253-258, 292-297.

Versión Electrónica: Sara Daza Maya

* Esta obra forma parte del material de tesis de Licenciatura de Elisa Zacarías dirigida por Jefferson King.

Contenido

Historia de los argumentos de Zenón sobre el movimiento
Fases en el desarrollo de la teoría de límites

HISTORIA DE LOS ARGUMENTOS DE ZENON SOBRE EL MOVIMIENTO

Fases en el desarrollo de la teoría de límites.

Por Florian Cajori, Colorado College.

I

A. El propósito de los argumentos de Zenón.

INTRODUCCION. Entre las cuestiones sobre los fundamentos de las matemáticas, las más antiguas y que han mantenido el interés de los investigadores desde la antigüedad hasta las mas recientes especulaciones de la filosofía de las matemáticas, son los argumentos de Zenón sobre el movimiento. Zenón floreció en el siglo V a.C., pero sólo recientemente G. Cantor en su *Mengenlehre* se ha dedicado a la elucidación completa de las paradojas de Zenón. La historia de estas paradojas es en gran medida la historia de los conceptos de continuidad, de infinito e infinitesimal.

Han diferido mucho las opiniones sobre la naturaleza exacta y el propósito de los argumentos de Zenón. No ha llegado hasta nosotros ningún escrito original de Zenón. Conocemos sus principios sólo por medio de sus críticos y comentaristas –Platón, Aristóteles y Simplicio. Platón nació 60 años después de Zenón, Aristóteles alrededor de 100 años después. Simplicio vivió casi 1000 años después de Zenón. Platón no reproduce los argumentos de Zenon[1] pero discute su propósito, que era "proteger los argumentos de Parménides contra aquéllos que se mofan de él y buscan mostrar los numerosos resultados ridículos y contradictorios que ellos suponen se derivan de la afirmación del *Uno*"; Zenón argumenta que "no hay multiplicidad", él "niega la pluralidad".

INTERPRETACIÓN ARISTOTÉLICA DE LOS ARGUMENTOS DE ZENON.
Aristóteles da de manera muy resumida los argumentos de movimiento, conforme le fueron llegando, en estas palabras:[2]

> "Zenón razona aquí incorrectamente; ya que dice que todo cuando en estado uniforme, está continuamente o en movimiento y que un cuerpo moviéndose en el espacio está continuamente en el *Ahora* [el instante], por lo tanto la flecha en su vuelo está en reposo. Pero esto es falso, por la razón de que el tiempo no está compuesto de *Ahoras* individuales e indivisibles, como tampoco ninguna otra cantidad está compuesta de esa manera. Hay cuatro pruebas contra el movimiento dadas por

Zenón, que presentan muchas dificultades a aquéllos que tratan de refutarlas. La primera es sobre la imposibilidad del movimiento, con base en que una cosa que se mueve en el espacio debe llegar al punto medio antes de alcanzar el punto final. Hemos entrado en detalles sobre esto en la discusión previa. La segunda es la conocida como Aquiles; consiste en que una carrera el más rápido no puede alcanzar al más lento; ya que el perseguidor siempre debe llegar al punto de donde partió el perseguido, de modo que el más lento necesariamente está siempre una pequeña distancia más adelantado. Pero éste es el mismo argumento del de la bisección y difiere de él sólo en esto: la distancia añadida no se divide precisamente en mitades. De este argumento se deduce que el más lento no es alcanzado, pero se apoya en la misma suposición que la bisección (ya que en ambos argumentos se establece que una cosa no puede llegar al punto final, porque la cantidad está dividida de alguna manera). Sin embargo, este segundo argumento tiene la afirmación adicional, de que en una carrera, aún el más rápido no puede alcanzar al más lento y por lo tanto la refutación debe ser la misma. La afirmación de que el que sale primero no puede ser alcanzado es falsa. Seguramente en el momento en el que lleva ventaja, no es alcanzado. No obstante, es alcanzado; Zenón simplemente admite que el perseguidor recorre completamente toda la distancia. Estas son dos de sus pruebas; la tercera es a la que nos referimos anteriormente, que la flecha en movimiento está en reposo. Se basa en la suposición de que el tiempo está formado por *Ahoras* individuales. Si esto no es admitido, entonces la conclusión no es válida. La cuarta se refiere a cuerpos iguales que se mueven en una trayectoria paralela a otros cuerpos del mismo tamaño pero que se mueven en dirección opuesta, o sea, los primeros se mueven hacia un lado a partir del extremo de la trayectoria, los segundos se mueven en dirección opuesta a partir del punto medio de la trayectoria con la misma velocidad. De aquí él pensó que debía concluir que la mitad del tiempo debe ser igual a su doble. La falacia está en la afirmación de que cuando un cuerpo se mueve paralelamente a otro que está en movimiento, con la misma velocidad a la que [el segundo] se mueve, y pasa a uno que está en reposo, entonces el tiempo para pasarlo es el mismo en ambos casos. Esto es falso."

Para mayor claridad vamos a repetir los argumentos de Zenón en una forma más explícita dada por Burnet,[3] la cual es una paráfrasis libre de los enunciados de Aristóteles. Nos parece conveniente, para referencias futuras, usar los nombres "Dicotomía", "Aquiles", "Flecha" y "Estadio" para los cuatro argumentos contra el movimiento, respectivamente.

1. "DlCOTOMÍA": No se puede recorrer un número infinito de puntos en un tiempo finito. Se debe recorrer la mitad de cualquier distancia antes de recorrerla toda, y la mitad de ésa otra vez antes de recorrer el todo, y la mitad de ésa otra vez antes de recorrerla. Esto pasa *ad infinitum*, de manera que (*si el espacio está hecho de puntos*) hay un número infinito en cualquier espacio dado y recorrerse en un tiempo finito.

2. "AQUILES": El segundo argumento es la famosa paradoja de Aquiles y la tortuga. Aquiles primero debe llegar al lugar del que partió la tortuga. Mientras, la tortuga recorrerá una distancia pequeña. Aquiles debe recorrer ésta, y todavía la tortuga estará adelante. Aquiles está cada vez más cerca, pero nunca la alcanza.

3. "FLECHA": El tercer argumento contra la posibilidad de movimiento *a través de un espacio formado por puntos* es que, con esta hipótesis, una flecha en cualquier momento de su vuelo debe estar en reposo en un punto particular.[4]

4. "ESTADIO": Supongamos tres filas de puntos en yuxtaposición como en la Fig. 1.

Fig. 1	Fig. 2
A	A . . . . .
B	B .•.•.•.•.•
C	C . . . . .

Una de estas (B) no se mueve, mientras que A y C se mueven en direcciones opuestas con la misma velocidad hasta llegar a la posición representada en la Fig. 2. El movimiento de C relativo a A será el doble de su movimiento relativo a B, o, en otras palabras, cualquier punto dado en C ha pasado el doble de puntos en A de los que ha pasado en B. No puede por lo tanto, darse el caso de que un instante de tiempo corresponda al paso de un punto a otro.

INTERPRETACIÓN DE TANNERY SOBRE LOS ARGUMENTOS DE ZENÓN.

Según Aristóteles y Simplicio, los argumentos de Zenón son falacias. Desde el tiempo de Aristóteles hasta mediados del siglo XIX universalmente se consideró erróneo el razonamiento de Zenón. Durante todos esos siglos los esfuerzos de filósofos y matemáticos sobre este tema estaban dirigidos a explicar la naturaleza exacta de los disparates de Zenón. Recientemente se presentó la opinión de que Zenón fue reportado incorrecta e incompletamente, que sus argumentos fueron desviados de su verdadero propósito por los sofistas que los usaron para proponer el escepticismo y la negación del conocimiento, y que Aristóteles los describió ya modificados por los sofistas. Cousin, Grote y P. Tannery, tres grandes líderes en la interpretación del pensamiento griego, han considerado los argumentos de Zenón como esfuerzos serios, conducidos con rigor lógico. Cousin[5] sostenía que Zenón rebatía con éxito la idea de la multiplicidad desprovista de toda unidad. Grote[6] sostenía un punto de vista similar. Tannery[7] argumentaba que Zenón se oponía a la idea de que un *punto es una unidad en posición*. Zeller[8] rechaza las tres explicaciones principalmente con base en que ellas no están respaldadas por los escritos existentes de los filósofos griegos. También es cierto que ningún documento griego refuta directamente ninguna de las tres interpretaciones. Es deplorable esta falta de información exacta y detallada. La resuscitación de los argumentos de Zenón por Tannery merece nuestra atención por la coherencia interna que les otorga. Según Tannery, Zenón no negó el movimiento, pero quiso demostrar que el movimiento era imposible bajo la concepción del espacio como la suma de puntos. Tannery no lucha contra el enunciado tradicional de que Zenón argumentaba contra la pluralidad; él acepta la explicación de Platón, pero difiere de él y de otros en la naturaleza precisa de esta pluralidad. Según Tannery, Zenón no combatía la noción ordinaria, por la cual dos borregos no son un borrego, sino una noción especial de los pitagóricos. Parménides, el maestro de Zenón, era atacado (dice Tannery) por los pitagóricos, y Zenón entró en el conflicto luchando contra la idea mística pitagórica de un punto matemático --un punto definido como *una unidad que tiene posición*. Esta definición pitagórica es mencionada por Aristóteles. Tannery interpretó esta definición como que un sólido es la suma de puntos, justo como un número es la suma de unidades. Pero esa idea es falsa. Un punto, matemáticamente hablando, no es unidad ó 1; es un cero puro ó 0. Esta interpretación de la frase *unidad que tiene posición* atribuye a Zenón la aprehensión de un concepto abstracto, el de un punto, sin longitud, altura ni anchura. Del siguiente pasaje de Aristóteles[9] se hace evidente que no es irracional atribuir a Zenón estas abstracciones:

> "Si la unidad absoluta es indivisible, sería, de acuerdo con el axioma de Zenón, nada en absoluto. Porque aquello que no hace mayor a lo que se le suma, ni lo hace menor por su sustracción, no es una de las cosas que son, ya que está claro que lo que *es* debe ser una magnitud, y sí es una magnitud, debe ser corpórea, pues lo corpóreo tiene ser en todas las dimensiones. Otras cosas, como la superficie y la línea, cuando se añaden de una manera hace las cosas mayores, cuando se añaden de otra manera, no; pero el punto y la unidad no agrandan las cosas aunque se añadan a ellas de cualquier manera."

Es difícil aclarar cuánto de esto se debe a Aristóteles y cuánto a Zenón. Pero no tendría caso mencionar a Zenón si no tuviera participación en esto.

Muchos críticos creen que Zenón dio sus argumentos en forma de diálogo. Con base en esto, Tannery se enfrentó a la reconstrucción de los argumentos de Zenón a partir de los fragmentos resumidos que han llegado hasta nosotros. Considérese el siguiente argumento de Zenón sobre divisibilidad, presentado por Simplicio.[10]

> "Si aquello que es, no tiene magnitud no puede ser. Todo lo que realmente es, necesita tener magnitud y espesor, y una parte de ello debe estar separada de otra por un cierto intervalo. Y lo mismo puede decirse de la próxima parte más pequeña. Basta decir esto una vez puesto que todo igualmente se sigue repitiendo para siempre. Ya que no habrá tal parte que pudiera servir como límite. Y nunca habrá una parte salvo en referencia con otra parte. Así, si los múltiples tienen *ser*, deben ser tanto grandes como pequeños --tan pequeños que no tienen talla en absoluto, y tan grandes como para ser infinitos".

La reconstrucción de Tannery sobre este pasaje es como sigue:

Un adversario pitagórico dice que una cantidad finita puede ser considerada como la suma de partes indivisibles.

Zenón presenta la primera parte del dilema resultante de esto, así: Admitiendo, como ambos lo hacemos, que una cantidad es infinitamente divisible por bisección continua, es evidente que las partes se hacen cada vez más pequeñas. Entonces, si hay un último término, es el 0. Pero la suma de tales términos 0 indivisibles es solamente 0. Por lo tanto la cantidad no tiene magnitud.

Pero por qué, dice su adversario, las partes indivisibles pueden no ser diferentes de cero y tener magnitud.

Entonces Zenón presenta la segunda parte del dilema: las partes indivisibles tienen magnitud, y son infinitas en la suma de estas partes debe ser infinita.

En consecuencia, una cantidad finita no puede considerarse como la suma de partes indivisibles.

Esta explicación del argumento de Zenón lo coloca ciertamente más alto como lógico que la antigua explicación que acusa a Zenón de la falta de habilidad para ver que si $xy = c$, x puede crecer y y simultáneamente decrecer de tal manera que su producto no se altere.

Ahora, vamos a ver de qué manera Tannery aplica un *punto como unidad en posición* a la resucitación de los argumentos de Zenón sobre el movimiento. Tannery los presenta en la forma de un doble dilema.

El primer argumento, la "dicotomía" contiene temas que ya se consideraron anteriormente, relacionados con la división infinita. En tanto el espacio se considera hecho de partes indivisibles, el número infinito de partes que según ambos contrincantes resulta de la bisección continua, no pueden ser recorridas todas en un tiempo dado.

El adversario puede ahora presentar el punto expuesto por Aristóteles, de que la bisección no se lleva a cabo hasta un infinito actual,* sino sólo hasta un infinito potencial, y puede por tanto recorrerse en un tiempo finito.

Zenón contesta con su "Aquiles", el cual no involucra bisección y en el cual el intervalo-tiempo está subdividido en forma muy parecida al intervalo-espacio.

El adversario entonces toma la posición de que ha admitido demasiado. El tiempo finito, asegura, se puede dividir en una infinidad de partes. ¿No hay una suma de instantes? ¿Puede no corresponder un instante a cada posición sucesiva?

Contra esto Zenón dirige sus últimos dos argumentos, que constituyen un segundo dilema. En cada instante la flecha que viaja ocupa una posición fija. Pero ocupar una posición fija en un instante dado significa que está en reposo ese instante. Por lo tanto la flecha está en reposo en todo instante de su vuelo.

El adversario explica que cuando dijo que el tiempo era la suma de los instantes, no quería decir que cada instante pudiera aplicarse a una posición fija de la flecha, sino al paso de cada posición hacia la próxima posición.

Aquí Zenón presenta su "estadio" como cuarto argumento, muestra que la declaración del adversario no es válida, ya que haría a todos los movimientos iguales.

Un movimiento desde un punto *A* (ver Fig. 1 y Fig. 2) hasta el siguiente punto sobre la izquierda requiere un instante.

Un movimiento de un punto *C* al siguiente punto a la derecha requiere el mismo instante.

Por tanto *A* se mueve con relación a *C* el doble de rápido que con relación a *B*.

Por consiguiente lo que corresponde al instante no es el paso de un punto a otro, ya que entonces se deduciría que uno es igual a su doble.

La explicación de Tannery sobre los cuatro argumentos, particularmente de la "flecha" y el "estadio", eleva estas paradojas de argumentos infantiles a argumentos con conclusiones que se siguen con fuerza contundente. No coloca a Zenón en la posición de ser ignorante sobre las ideas más simples del movimiento relativo; presenta a Zenón como un lógico de primera clase.

Las conclusiones de Tannery han sido firmemente respaldadas por G. Milhaud, [11] pero rebatidas por otros escritores franceses y por Zeller.

NOTAS:

1. Platón, *Parmenides,* 127 D., trad. inglesa de Jowett.

2. Ariatóteles, *Física,* VI, 9. Ver la edición de Carl Pantl, en griego y alemán, Leipzig, 1854. Omitimos la última parte de la versión de Prantl sobre el cuarto argumento de Zenón contra el movimiento. El texto es defectuoso. Después damos la elaboración de la prueba por Burnet, que abarca la conjetura más probable de lo que Aristóteles dijo originalmente.

3. J. Burnet, *Early Greek* Philosophy, 1892, pp. 322 ss.

4. Diógenes Laercio, IX, 72, quien vivió 500 años después de Aristóteles, probablemente alrededor de 200 d.C. dio una versión diferente de la "flecha": "Aquello que se mueve no puede moverse en el lugar donde está, ni en el lugar donde no está". Este argumento está explicado por Williams Minto, profesor de lógica en la Universidad de Aberdeen, en su *Logic, Inductive and Deductive*, Londres, 1893, p. 224, y por W.R. Royce Gibson en su libro *The Problem of Logic*, Londres 1908, p.290, como sigue:

"Si un cuerpo se mueve, debe moverse donde está o donde no está. Pero un cuerpo no puede moverse donde está, ni tampoco puede moverse donde no está.

"Por lo tanto, no puede moverse en absoluto, i.e. el movimiento es imposible."

Esta versión de la "flecha" debe desecharse por dos razones: Primera, aparece por primera vez alrededor de 700 años después de Zenón y por esta razón no es digna de confianza; segunda, no hay núcleo para la discusión. Como dice Gibson, se resume a esto: "Si un cuerpo se mueve, se debe mover bajo condiciones que hacen imposible al movimiento".

5. *Fragments philosophiques*, por M. Cousin, 5a ed., París 1865, p. 69.

6. George Grote, Plato, Vol. I, 3a. ed., Londres, 1875, pp 100-104.

7. Paul Tannery, "Le concept scientifique du continu. Zenón d'Elée et Georg Cantor", Revue *philosophique de la France et de L'Etranger,* X année, T. XX (1885}, pp. 385-410; Paul Tannery, *Science helléne*, París, 1887, pp. 247-261.

8. E. Zeller, *Die Philosophie der Griechen*, 1. Theil, 1. Hälfte, 5. Aufl., Leipzig, 1892, pp. 591-604.

9. Aristóteles, Met., II, 4, 1001 b 7; trad. inglesa tomada de C. M. Bakewell, Source Book in Ancient Philosophy, Nueva York, 1907. p. 23.

10. Simpl. 140, 34 [R.P. 1050, Fr. 2 en la disposición de Diels]; C.M. Bakewell, op.cit., p. 22.

* N.T.: En este trabajo tradujimos *actual infinite* como "infinitoactual" y potential como "infinito potencial". Lorite Mena explica la teoría de Aristóteles del acto y la potencia así: "Existir, para toda realidad (puesto que se trata de principios ónticos) es actualizarse (*enérgeia*) --en el sentido de apropiarse de, de poseerse en—sus potencialidades (*dynamis*). Esta auto-apropiación del ser por lo que puede ser, esta auto-identificación de cada realidad en la apropiación de sus potencias, está expresada con toda precisión por el término que delimita el principio fundamental de la existencia: *entelécheia*" (*El "Parménides" de Platón, un diálogo de lo indecible*, Universidad de los Andes, F.C.E., Bogotá, 1985, p. 84).

B. Delfgaauw, en su *Historia de la filosofía (Beknopte Geschiedenis der Wijsbegeerte*, trad. española del original neerlandés por Francisco Carasquer, Ediciones Carlos Lohlé, Buenos Aires, 1966, p. 40) dice: "Los términos potencia (*dynamis*) y acto (enérgeia) prestan a la filosofía de Aristóteles una temática sumamente interesante. En todos los seres hay un principio potencial y otro actual, es decir, un principio de posibilidad y otro de realidad. Todos los seres se encuentran, por consiguiente, entre dos polos: la materia prima, que sólo es potencia y por lo mismo no puede ser real al estar privada de forma, y el acto puro, que no encierra potencia alguna en absoluto, que es a lo que a veces llama

Aristóteles Divinidad. Esta composición de potencia y acto explica la variabilidad y la realidad de los seres.”

11. Milhaud, "Le concept du nombre chez les Pythagoriciens et les Eléates", *Revue de métaphysique et de morale*, I, París, 1893, p. 141.

II

B. Exposición y critica de Aristóteles

Los propósitos de los argumentos de Zenón según Cousin, Grote. y P. Tannery, difieren del propósito como fue interpretado por Platón, Aristóteles y los escritores griegos posteriores. Los tres intérpretes modernos daban a los argumentos un lugar en la historia del pensamiento griego que los presentaba como intachables en rigor lógico. Por otro lado, Aristóteles y los posteriores escritores griegos interpretaron los argumentos como falacias y dedicaron su agudeza mental a intentar resaltar la verdadera naturaleza de las falacias. Con excepción de los estudios recientes de Cousin, Grote, y Tannery, la historia de los argumentos de Zenón contra el movimiento ha sido, durante 2000 años la historia de los intentos para explicar las "falacias" de Zenón. Aristóteles reconoció la gran dificultad en exponer su fuente oculta de error lógico. El sexto libro de su *Física* está dedicado a la exposición de las sutiles nociones de continuidad e infinito. De hecho toda la *Física*, que abarca alrededor de 225 páginas en impresión moderna, dedica sus 8 libros completos a la discusión de las nociones de movimiento, divisibilidad, continuidad, infinito y vacío. Conforme uno lee la *Física* se impresiona por el hecho de que el gran estagirita no dudó en manifestar sus argumentos repetidamente. Por 20 siglos los puntos de partida de la discusión filosófica han sido las críticas de Aristóteles sobre los argumentos de Zenón: por 20 siglos las falacias de Zenón han intrigado a muchas de las mejores mentes. Al igual que los problemas de la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo, las falacias de Zenón han retado a algunos de los mejores cerebros; pero, como los problemas anteriores, finalmente han sido forzadas a rendir sus secretos y a entrar en el grupo de los «problemas del pasado».

Antes de entrar al estudio de Aristóteles debemos referirnos a la teoría atomista propuesta por Leucipo (ca. 500 a.C) y desarrollada posteriormente por Demócrito (ca. 460 y 357 a.C.) y otros. Ellos concebían a las magnitudes como compuestas de un número finito de elementos indivisibles. Este punto de vista debió haber ganado cierta ascendencia entre algunos matemáticos de la antigüedad. Demócrito mismo no carecía de habilidad matemática. Se sabe por Plutarco que Demócrito sugirió la siguiente cuestión:[1]

> «Si un cono fuera cortado por un plano paralelo a su base,[2] ¿qué deberíamos pensar de la superficie de las secciones, que son iguales o desiguales? Si son desiguales, eso mostrará que el

> cono es irregular, con muescas como escalones, y disparidades; y si son iguales, las secciones serán iguales, y el cono parecerá tener la propiedad de un cilindro, a saber, estar compuesto de círculos iguales y desiguales, lo cual es absurdo.»

Esta paradoja de Demócrito dice que las dificultades están en la manera de aceptar la noción de un infinitesimal y por lo tanto indirectamente favorece la idea de divisibilidad en solamente un número finito de partes.

En el intento de Antifón para cuadrar el círculo se supone que las líneas curva y recta son finalmente reducibles a los mismos elementos indivisibles. Antifón, de acuerdo con el testimonio de Simplicio y Filopón, inscribió en un círculo un cuadrado, y por bisección del arco, obtuvo polígonos regulares de 8, 16, 32 lados, y así sucesivamente. Él suponía que podría alcanzar un polígono que coincidiera con la circunferencia. Simplicio observa:[3]

> «La conclusión aquí es manifiestamente contraria a los principios geométricos, no como sostiene Alejandro, porque el geómetra supone como un principio que una circunferencia puede tocar a una línea recta en sólo un punto, y Antifón deja esto a un lado; porque el geómetra no supone esto, pero lo prueba. Sería mejor decir que es un principio que una línea recta no puede coincidir con una circunferencia, porque la que no encuentra a la circunferencia en un punto solamente, la encuentra en dos puntos y no más, y los encuentros se dan en puntos solos. No obstante al bisecar continuamente el espacio entre la cuerda y el arco, nunca se agotará, ni llegaremos nunca a alcanzar la circunferencia del círculo, aunque el corte se continuara *ad infinitum:* si lo hiciéramos, estaríamos haciendo a un lado un principio geométrico que rechaza que las magnitudes sean divisibles *ad infinitum.*»[4]

La idea de Aristóteles sobre continuidad difiere de la idea de continuidad desarrollada por Georg Cantor y sus seguidores. El de Aristóteles es un continuo físico, sensible, en el cual hay un contacto íntimo entre sus elementos; el de Cantor es una colección de elementos, acomodados en orden, infinitos en número, pero cada uno exterior al otro; es puramente abstracto y trasciende el poder de la imaginación para captarlo. Como la *Física* de Aristóteles no está traducida al inglés, traduciremos libremente. Dice Aristóteles:[5]

> «Si las cosas continuas, las cosas que se tocan una a la otra, y las cosas sucesivas son como se describen anteriormente, a saber, que las cosas continuas son aquellas cuyos límites extremos son uno [están unidos], las cosas que se tocan son aquel1as cuyos límites extremos tienen la misma posición, las cosas sucesivas son aquellas entre las que no yace nada que sea como ellas, entonces es imposible que una cosa continua consista de cosas indivisibles, como por ejemplo, que una línea esté hecha de puntos, con la línea tomada como continua y un punto como indivisible».

Este pasaje se hace más claro con una o dos citas de la *Física*, líbro V, §3:

"Continuas son aquellas cosas que en su unión se vuelven una en naturaleza; y así como aquello que las mantiene en continuidad juntas se hace uno, así el todo será uno, como por ejemplo, por medio de un clavo, o pegamento, o una adherencia o un acrecentamiento".

"Las cosas continuas necesariamente deben tocarse, por otro lado, las cosas que se tocan no son necesariamente continuas, porque sus extremos finales, aunque están localmente juntos, no son necesariamente uno y el mismo".

Volviendo a la *Física*, libro VI, §l, reproducimos la parte principal del argumento de Aristóteles que lo conduce a la conclusión de que una línea no está hecha de puntos:

"Ya que ni los extremos finales de los puntos son uno [están unidos], por la razón de que, de un indivisible, el uno no puede ser un extremo y el otro otra parte, ni están los extremos finales localmente juntos, ya que lo indivisible no puede tener extremos".

De acuerdo con Aristóteles, las cosas continuas son siempre divisibles en partes que son continuas. De la misma forma, el tiempo no está hecho de partes consideradas como *Ahoras* indivisibles.[6] Citamos de la *Física*, libro VI, §2:

"Como cada magnitud es divisible en magnitudes (porque se acaba de probar que el continuo no puede consistir de lo indivisible, y toda magnitud es continua), el más rápido de dos debe necesariamente en el mismo tiempo moverse a lo largo de una distancia más grande, y en menos tiempo a lo largo de una distancia igual, y también en menos tiempo a través de una distancia más grande, como sin duda algunos definen al más rápido..."

"Ya que todo movimiento tiene lugar en el tiempo, y en cada tiempo es posible que algo se mueva y todo lo móvil puede moverse más rápidamente y también más lentamente, entonces puede ocurrir en cada tiempo el movimiento más rápido y el más lento. Si esto sucede, entonces el tiempo debe ser continuo; por lo continuo quiero decir aquello que siempre es divisible en partes divisibles..."

«Si el tiempo es continuo, también la distancia, porque en la mitad del tiempo una cosa recorre la mitad de la distancia y, en general, a menor tiempo menor distancia, porque el tiempo y la distancia tienen las mismas divisiones; y si uno de los dos no tiene límite, tampoco el otro... Por esta razón el argumento de Zenón supone una falsedad, que algo ilimitado no puede viajar sobre algo ilimitado a lo largo de sus propias partes, o tocar tal ilimitado, en un tiempo finito; porque la longitud, así como el tiempo y, en general, todo lo continuo, puede considerarse ilimitado en un doble sentido, a saber, de acuerdo con [el número de] las divisiones o de acuerdo con las [`distancias entre los] límites extremos.»

Esta crítica profunda dirigida contra Zenón se refiere evidentemente al «Aquiles», en donde estamos en peligro de modificar, en nuestras mentes, las condiciones realmente existentes; estamos en peligro de pensar que la distancia entre Aquiles y la tortuga decrece a través de un número ilimitado de subdivisiones, mientras que el tiempo para recorrer estas subdivisiones sucesivas es más o menos el mismo para cada una. De esta distorsión de eventos resulta una subdivisión ilimitada de una distancia finita, y una acumulación ilimitada de intervalos de tiempo finitos: la primera constituye lo que desde un punto de vista moderno es una serie geométrica convergente de intervalos de espacio; la última, una serie divergente de intervalos de tiempo. Se hace atravesar una distancia finita en un tiempo infinito.

Los argumentos de Aristóteles contra el «Aquiles» y la «dicotomía» son los mismos. Los menciona en otras partes de su *Física.* Ya que una línea no puede estar construida por puntos, en realidad no puede subdividirse en puntos.[7]

> “La bisección continua de una cantidad es ilimitada, así que lo ilimitado existe potencialmente pero en realidad nunca es alcanzado.”

> «Previamente refutamos esto [la «dicotomía»] por el hecho de que el tiempo tiene ilimitadamente múltiples partes, en consecuencia de lo cual no hay absurdo en la consideración de que en los intervalos de tiempo ilimitados, uno recorra ilimitadamente múltiples espacios... [pero como Aristóteles no consideró esto una explicación completa, continúa:]. Si se divide una línea continua en mitades, se usa un punto como dos, porque lo hace el comienzo [de una parte] y el final [de la otra]: de esta manera procede quien... biseca, pero en esta división ni la línea ni el movimiento son continuos; ya que ...en el continuo hay, con seguridad, ilimitadamente múltiples mitades, pero no actualmente ilimitadas. sólo potencialmente.»[8]

De los numerosos pasajes en la *Física* de Aristóteles podrían citarse en relación con la «flecha». elegimos el siguiente (libro VI, §8):

> «... Una cosa está en reposo. cuando no cambia en un *Ahora* y tampoco en otro *Ahora*, permaneciendo tanto ella misma como sus partes en el mismo estado ... no hay movimiento ni reposo en el *Ahora*... Por el contrario, en un intervalo de tiempo, ella [una variable] no puede existir en el mismo estado de reposo, porque de otro modo se inferiría que la cosa en movimiento esta en reposo.”

La impugnación de Aristóteles sobre el «estadio» está al final de nuestro primer extracto de la *Física* (libro *VI,* §9), donde se señala que Zenón falsamente supone que un cuerpo se mueve a la misma velocidad con relación a un cuerpo que está en reposo, de la manera que con respecto a un cuerpo en movimiento.

MÁS COMENTARIOS SOBRE ARISTÓTELES. La crítica principal que se debe hacer a los profundos argumentos de Aristóteles es que no llegan suficientemente lejos. La «dicotomía» y el «Aquiles» contienen la teoría de límites, una teoría que muy recientemente se ha visto en necesidad de reconstrucción y la cual se desarrolló de modo imperfecto en la antigüedad griega. Particularmente llama nuestra atención la interrogante propuesta por los argumentos de Zenón, ¿Cómo es posible que una variable alcance su límite? Esta cuestión no encuentra respuesta en Aristóteles. Es notable también el hecho de que Aristóteles negó la existencia del infinito actual, distinguiéndolo del infinito potencial. La «flecha» pidió una definición más precisa del *Ahora* (el instante). ¿El instante no tiene duración? ¿Es, por así decirlo, un punto del tiempo? o ¿el instante es un infinitesimal —alguna constante distinta de cero, todavía más pequeña que. cualquier cantidad finita? Aquí Aristóteles trazó una línea firme: El *Ahora* era un punto del tiempo, no tenía duración; en el *Ahora* no podía haber ni movimiento ni reposo.

Se verá que los conceptos matemáticos incluidos aquí son de lo más fundamental. El concepto de límite contiene nociones de infinito y está históricamente conectado con el concepto de infinitesimal. Todos estos conceptos son básicos. Sería difícil seleccionar otras tres nociones con mayor alcance en la ciencia matemática que infinitesimal, infinito y límite.

NOTAS:

1. Plutarco, *de Comm. Not.*, Vol. IV. p. 1321. ed. Didot. tomado de Allman. *Greek Geometry.* 1889. p. 81.
2. Este pasaje obviamente significa que el plano cortante está infinitamente cerca de la base del cono.
3. *Simplicio comment, in octo Aristotelis physicae auscultationis libros,* Venecia, 1526, 80. Citamos la traducción dada en G. J. Allman. *Greek Geometry,* 1889. p. 66.
4. De acuerdo con otro comentarista, Temistio (317-387 d.C.), Antifón comienza su proceso de cuadrar el circulo inscribiendo un triángulo equilátero y no un cuadrado.
5. *Acht Bücher der Physik* de Aristóteles. Griechisch und Deutsch von Carl Prantl. Leipzig. 1854. p. 279. Buch VI, I.
6. Véase *Física,* libro VI. 9. citado anteriormente en este artículo.
7. Aristóteles. *Física*. VI. 1. Edición de Prantl. p. 281.
8. Aristóteles. *Física* III. 7. Edición de Prantl. p. 141.
9. Aristóteles. *Física* VIII. 8. Edición de Prantl. pp. 445. 447.
   Véase también *Lib de lineia insecab* de Aristóteles. p. 968.

III

C. Dos mil años de lucha por la luz

1. Los griegos después de Aristóteles

Que Platón y Aristóteles explicaran correctamente la naturaleza de los argumentos de Zenón y el propósito que el mismo Zenón tenía en mente al presentarlos, no tuvo importancia en trazar la historia del pensamiento sobre este tema después del tiempo de Aristóteles. Aparentemente los escritos de Platón y Aristóteles constituyeron las fuentes de información para los escritores posteriores. Aristóteles dio a conocer los argumentos de Zenón en forma de «falacias», y lo que hay que rastrear es la influencia de estas «falacias». No hay duda de que esta influencia fue enorme en el desarrollo de la geometría griega. Ya que Aristóteles, con toda su habilidad dialéctica, no fue capaz de explicar satisfactoriamente todas las paradojas que surgieron en el estudio del infinito y del movimiento, H. Hankell[1] y otros historiadores recientes de matemáticas, sacaron la conclusión, probablemente correcta, de que en la geometría clásica griega fueron sacrificados el infinito y lo infinitesimal en aras de mayor rigor. Veremos que en escritos, recientemente descubiertos, de Arquímedes se confirma este punto de vista. Los matemáticos supusieron que toda magnitud se puede dividir a placer. La doctrina de las líneas inconmensurables queda más allá de la posibilidad de la división ilimitada. La negación de la existencia de lo infinitesimal se remonta a Zenón, quien, según Simplicio[2] afirmó: "Aquello que, al ser añadido a otra cosa, no la hace más grande, y al quitarlo no la disminuye, es nada". Esta cuestión trascendental se le presentó veintidós siglos después a Leibniz, quien le dio distintas explicaciones. En una exposición Leibniz extendió la definición de igualdad hasta declarar a las magnitudes como iguales aún cuando difieren una de otra por una cantidad incomparablemente pequeña. Los matemáticos griegos posteriores siguieron una política radical hacia el infinitesimal: formalmente lo excluyeron de su geometría demostrativa por medio de un postulado. Esto lo hicieron Eudoxio (408-355 a.C.), Euclides (ca. 300 a.C.) y Arquímedes (287-212 a.C). Arquímedes da el postulado, atribuyéndolo a Eudoxio, como sigue:[3]

> «Cuando dos espacios son desiguales, es posible añadir la diferencia por la cual el menor es sobrepasado por el mayor, tantas veces que todo espacio finito será excedido.»
>
> Euclides en sus *Elementos* (Libro V, Def. 4) da el postulado en forma de definición:
>
> «Se dice que las magnitudes están en razón una de otra, cuando la menor puede ser multiplicada de manera que exceda a la otra.»

El Método de Arquímedes, un libro que se pensaba que se había perdido, pero afortunadamente fue descubierto por Heiberg en 1906 en Constantinopla, da la interesante evidencia de que Arquímedes, aunque no usaba la noción de infinitesimales en demostraciones formales, la empleaba en la búsqueda tentativa como un método de descubrimiento. Consideraba a los infinitesimales lo suficientemente científicos para sugerir la verdad de los teoremas, pero no para proporcionar pruebas rigurosas. El proceso es mecánico, consistente en la ponderación de los elementos infinitesimales, a los que llama líneas rectas o áreas planas, pero que son en realidad tiras infinitamente angostas o láminas planas infinitamente delgadas. [4] Se considera la misma anchura o espesor en los elementos ponderados en cada tiempo cualquiera.

El escéptico Sexto Empírico (200 d.C.) dio más evidencia de que los infinitesimales preocupaban a los pensadores griegos a través de los siglos. Este aventura la paradoja de que, cuando una línea girando en un plano sobre uno de sus extremos describe un círculo con cada uno de sus puntos, estos círculos concéntricos son de área desigual, sin embargo cada círculo debe ser igual al vecino que toca.[5] La dificultad encontrada aquí es similar a la sugerida por Demócrito 500 años antes.

Plutarco (ca. 90 d.C.) hizo una interesante observación sobre Zenón, en su vida de Pericles. Dice que Pericles también era oyente de Zenón, el eléata, quien «también se perfeccionó en un arte propio para refutar y silenciar oponentes en discusiones: como Timón de Phlius lo describe:

> También la lengua de doble filo del gran Zenón, quien, Dijera uno lo que quisiera, podía argumentar que era falso.» Aquí y allá en la superficie del pensamiento griego aparece la personalidad de Zenón y algunas de las ideas contenidas en sus «paradojas» lo que indica que hay un flujo subterráneo de estas ideas a lo largo de la historia griega.

Sexto Empírico también da una versión de la “flecha” muy parecida a la que hemos citado de Diógenes Laercio. Él no atribuye la paradoja a Zenón, sino a Diodoro Crono. La existencia del movimiento se refuta porque: Si la materia se mueve, o está en el lugar en el que está, o en el lugar" en el que no está; pero no puede moverse en el lugar en el cual está y definitivamente tampoco en el lugar que no está, entonces no se mueve en absoluto. A esto Sexto Empírico replica planteando otro argumento igualmente paradójico y desde luego muy alejado de ser esclarecedor: Por la misma regla los hombres nunca mueren, porque si un hombre muere, debe ser o en el tiempo en el que está vivo, o en el tiempo en el que no está vivo; por lo tanto nunca muere.

2. Los romanos

Las sutilezas de los argumentos de Zenón sobre el movimiento atrajeron poca atención entre los romanos. Lucrecio (90-55 a.C.) utilizó la noción de infinito en argumentos sobre la teoría atómica. Su razonamiento consistió en que se debería suponer la existencia de átomos (indivisibles, pero no puntos matemáticos), porque de otro modo cada cuerpo, fuera grande o pequeño, consistiría en un número infinito de partes y no habría diferencia entre el más grande y el más pequeño puesto que ambos serían infinitos. [6]

Cicerón y Séneca mencionan a Zenón de pasada: uno para presentar el amor de Zenón por discutir, aun errores, y el otro para mostrar el escepticismo de Zenón. Cicerón[7] atribuye a Zenón el siguiente silogismo epigramático: «Aquello que ejercita la razón es de mayor excelencia que aquello que no ejercita la razón. No hay nada de mayor excelencia que el universo, por lo tanto el universo ejercita la razón Séneca[8] exhibe a Zenón negando no sólo la pluralidad –como lo hizo su maestro– sino negando también la unidad y la existencia real de los objetos externos. No tenemos ninguna buena razón para aceptar las opiniones de Cicerón y de Séneca acerca de los propósitos y fines de Zenón.

3. Época medieval

El primer padre de la iglesia conocido por su interés en los argumentos sobre el movimiento fue San Agustín (354-430 d.C.). En un diálogo sobre la cuestión de si la mente de un hombre se mueve o no cuando el cuerpo se mueve, y viaja con el cuerpo, llega a una definición de movimiento, en la cual muestra cierta ligereza. Se ha dicho que el escolasticismo no tenía sentido del humor. Esto no se aplica a la disertación de San Agustín sobre la imposibilidad del movimiento. Dice:

> «Cuando esta discusión terminó, vino un muchacho corriendo desde la casa para llamarnos a comer. Entonces noté que este muchacho nos forzaba no sólo a definir el movimiento, sino a experimentarlo por nosotros mismos. Así que allá vamos, pasando de un lugar a otro, y si no me equivoco, esto no es más que movimiento.”[9]

San Agustín merece también el crédito de haber aceptado la existencia de lo *actualmente infinito* y de haberlo reconocido no como una variable, sino como constante. Reconoció que *todos* los enteros positivos finitos eran una infinidad de este tipo.[10] En este punto San Agustín ocupó una posición radicalmente diferente y más avanzada que su antecesor, Origen de Alejandría, quien tomó partido contra lo actualmente infinito y sostuvo su posición, según admite G. Cantor, con los argumentos más profundos que se han dado en contra de lo actualmente infinito.[11] Estos argumentos los presentó en su forma más completa, muchos siglos después, el gran filósofo italiano de la Edad Media Tomás de Aquino (1225(?)-1274).[12] Sobre la naturaleza del continuo es particularmente importante para nosotros, el continuo lineal, tal como lo describió Aquino. Se concebía como *potencialmente* divisible, hasta el infinito, aunque en la práctica no se pudieran llevar al cabo las divisiones hasta el infinito. Por lo tanto no había una línea mínima. Por otro lado el punto no es una parte constituyente de un línea, ya que no posee la propiedad de divisibilidad infinita que poseen las partes de una 1ínea, ni el continuo se puede construir a partir de puntos. Sin embargo un punto por su movimiento, tiene la capacidad de generar una 1ínea. [13]

Este concepto del continuo, sostenido por Aquino, es una buena representación de las opiniones medievales escolásticas que prevalecían sobre este tema. Tuvo una firme ascendencia sobre la antigua doctrina atomista, la cual suponía que la materia se componía de partículas indivisibles muy pequeñas que poseían las propiedades de la materia misma. No fue creado ningún continuo superior a éste antes del siglo XIX.

En sus comentarios sobre la *Física* de Aristóteles, Aquino[14] explica con cierta amplitud los argumentos de Zenón contra el movimiento como los dio Aristóteles. Aquino muestra un dominio completo del tema, como lo expuso el estagirita, pero difícilmente presenta algún punto de vista nuevo.[15]

LOS PRIMEROS ESCRITORES INGLESES. El primer escritor inglés que se sabe que escribió sobre continuidad e infinito es Roger Bacon (1214(?)-1294), de quien se celebró en Oxford en 1914 el septingentésimo año de su nacimiento. Bacon argumentaba en contra de la composición del continuo en partes *indivisibles* (distintas de puntos), por medio de la renovación de los argumentos presentados por los griegos y los antiguos árabes. Bacon sostenía que la hipótesis de las partes indivisibles de tamaño uniforme harían que la diagonal de un cuadrado fuera conmensurable con un lado; si los extremos de una parte indivisible de una circunferencia están conectados por sus radios con el centro de la circunferencia, entonces los dos radios intersecarían un arco en una circunferencia concéntrica de menor radio. De esto se inferiría que la circunferencia interior es del mismo tamaño que la exterior. Esto es imposible. Bacon también argumentó en contra del infinito. Si el tiempo fuera infinito, eso implicaría que la parte es igual al todo –una deducción que él consideraba absurda. Argumentos similares lo llevaron a concluir que el mundo es finito.[16]

Los puntos de vista de Roger Bacon se hicieron más conocidos por medio de Juan Duna Escoto (1265-1308), el oponente teo1ógico y filosófico de Tomás de Aquino. Sin embargo, Escoto y Aquino tomaron la misma base al enseñar que en el continuo existían en efecto, puntos indivisibles. Con esto no se admite que el continuo esté hecho, o consista por completo, de puntos; los puntos indivisibles podrían ser simplemente puntos extremos, por ejemplo. Estas disputas estaban dirigidas contra los atomistas. A estos argumentos les falta ser más explícitos o tener mayor precisión. Lo que habíamos dicho de los comentarios de Aquino sobre Zenón se puede aplicar a lo que D. Escoto dijo acerca de las paradojas de Zenón.[17] En lugar de Aquiles y la tortuga él presenta viajeros más familiares como el caballo y la hormiga. Sus comentarios están anotados por el teólogo franciscano Franciscus de Pitigianis de Arezzo en Italia, quien escribió a finales del siglo dieciseis. Este último se expresa a favor de la admisión del infinito actual para explicar la «dicotomía» y el «Aquiles», pero no elabora adecuadamente el tema. Las ideas escolásticas sobre el infinito y el continuo se encuentran en los escritos de Bradwardine, el *doctor profundus* inglés, quien dice que se han dado cinco explicaciones sobre la naturaleza del continuo.[18]

NOTAS:

1. H. Hankel, *Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter*. Leipzig, 1874, p. 120.
2. Simplicius, *Phys*. 30a. Citado por E. Zeller, *History of Greek Philosophy,* Vol I, Londres, 1881, p. 615.
3. Arquímedes, *De quadr. parabol. Praef.*
4. T.L. Heath, *Method of Archimedes*, Cambridge, 1912, p. 8.
5. Sextus Empiricus, *Adv. math.* I, III, 66 ss, ed Fabricius. p. 322

   se hace referencia en K. Lasswits, *Geschichte der Atomistik* 1, Hamburgo y Leipzig, 1890,

   p. 148.
6. Lucretius, *De rerum natura,* ed. I. Bernays, Leipzig, 1886. I, p, 615ss,
7. *De natura deorum*. libro III, IX.
8. Epístola 88.
9. San Agustín, *De ordine,* II, VI, 18.
10. San Agustín, *De civitate Dei,* lib. XII, cap. 19. G. Cantor cita el capítulo en «Mitterlungen zur Lehre vom Transfiniten», *Zeitschr. F. Philosophie u philosoph, Kritik,* Bd. 91, p.81. Separatsbdruck, p. 32.
11. G. Cantor, *op. cit.*, Separatabdruck, p. 35.
12. Tomás de Aquino, *Summa theol.* I, q. 7 a 4. Citado por G. Cantor *op. cit.*, Separatabdruck, p. 36.
13. C.R. Wallner. en *Bibliotheca mathematica,* 3. F., Bd. IV, 1903 pp. 29,30, cita a Tomás de Aquino, *Opuscula momia*, 1562, o. 52, p. 369; o. 36, c. 2; o. 44, c. 1; o. 44, c. 2, p.280.
14. *Opero omnia.* Tom. II. Pars prima: *Sancti Thomae aquinatis ex ordine predicatorum quinti ecclesiae doctoris angelici pracclarissima commentaria in octo Physicorum Aristotelis libros... Ad haec accessi Roberti Linconiensis in eosdem suma*. Parisiis. MDCLX. Lectio XI. pp. 233-237, 252.
15. Robert Grosseteste (1175(?)-1253). obispo de Lincoln. o quien Roger Bacon considera como un científico de alto rango, da un resumen de lo que trata cada uno de los ocho libros de la *Física* de Aristóteles. La estima en la que se tenían sus escritos se nota en el hecho de que su resumen de

Aristóteles fue reproducido cuatro siglos después de su muerte en una edición de Aquino. Grosseteste dice de los argumentos de Zenón (p. 352): *Ad primum dicitur (sicut prius dictum est id dubitotione praecedenti) scilicet quod continuum est infinitum secundm potentiam & tale potest transiri. Et sic patet ad secundam rationem. Ad tertium dicitur quod Zeno dixit ipsum tempus componi ex instantibus, quod non est verum, ideo nec motus nec quies est in instanti, sed in tempore [sicut dixit Philosophus] uleo mobile non est spacio sibi aequali nisi tantum in instanti. Et cum dicitur, aut movetur, aut quiescit, negatur propositio, quia habet veritatem de es quod est in aliquo in quo aptum natum moveri aut quiescere pro tali mensura temporis.*

16. Véase *Opera hactenus inedita Baconi,* Fasc. 1, Metaphysica. Edidit Robert Steele. Londres, p. 11; Jonas Cohn, *Gescbichte des Unendlichkeitsproblems,* Leipzig, 1896, pp. 76-77; K. Lasswitz, *op. cit.,* Vol. I, pp. 193-195.

17. Duns Scoti, *Opera Omnia,* T. II: Joannis Duns Scoti Doctoris Subtilis ordinis minorum, in VIII libros Pbysicorum Aristotelis Quaestiones, cum annotationibus R.P.F. Francisci Pitigiani arrentini, etc. Lvgdvni, MDCXXXIX, Quaestio X, pp.390-393.

18. Véase Maximilian Curtze sobre el “Tractarus de continuo Bradwardini” en *Zeitschrift f. math. u. Phys.,* Jahrg., Suppl., 1868, Leipzig, p. 88.

IV

4. Primeras discusiones sobre límites: Gregoire S. Vincent Galileo, Hobbes.

LOS LÍMITES EN LOS SIGLOS XV y XVI. Con el siglo XV aparecen nuevas ideas matemáticas. Sus gérmenes se encuentran en la filosofía griega, pero no se desarrollan durante los siglos de oscurantismo. En el siglo XV en cardenal alemán Nicolás Cusanus (1401-1465), consideraba que no era posible aplicar con éxito la variabilidad; propuso la noción de un límite, aunque incapaz de pasar correctamente al límite tomaba en consideración la noción de infinitesimales pero no era capaz de usarlos en un cálculo infinitesimal. [1] Sostenía que las reglas desarrolladas para lo finito perdían su validez para lo infinito —aseveración que los pensadores posteriores no tomaron mucho en cuenta. Un punto que se mueve con velocidad infinita en una circunferencia, está en cada momento en toda posición sobre la circunferencia; por lo tanto está en reposo.

Durante el siglo, o siglo y medio después de Cusanus empezaron a aparecer en diferentes partes de Europa, como flores sobre un campo al inicio de la primavera, los conceptos de límites y los procesos sobre los pasos límite. Quizá el primero, cronológicamente hablando, en desarrollar las ideas de Cusanus, es Giovanno B. Benedetti, un distinguido predecesor de Galileo, quien publicó su trabajo en 1585 en Turín, Italia. Ya en 1586, y nuevamente en 1608, Simón Stevin en Leyden exhibió el proceso de pasar al límite.[2] En 1604 el matemático italiano Luc Valerio, publicó en Roma un tratado, *De centrogravitatis*, que contiene una notable aproximación de la idea moderna de límites. [3] En los famosos discursos de Galileo sobre mecánica y caída de cuerpos (1638) hay frecuentes ejemplos de límites. También en los Países Bajos, Gregoire S. Vincent, cuyas investigaciones no habían recibido el reconocimiento que merecen, sino recientemente, estaba familiarizado con los escritos de Luc Valerio, y él mismo contribuyó al establecimiento de los fundamentos del cálculo infinitesimal. A. Andreas Tacquet de Antwerp, y a John Wallis en su *Arithmetica infinitorum,* 1655, ambos familiarizados con la *Opus geometricum* de Gregoire S. Vincent, les debemos estudios similares que sostienen en concepto de límite.[4]

Procedemos ahora a mencionar especialmente las discusiones sobre los argumentos de Zenón. Benedetti, a quien mencionamos anteriormente, sostenía que la flecha volando, considerada en un punto de su trayectoría, no cubre una distancia finita, pero se distingue de una flecha en reposo por poseer el atributo de la velocidad que persiste aun en un tiempo y espacio infinitesimal.[5] Encontramos en

Giuseppe Biancani de Boloña una manera descuidada de seguir a Zenón. En una referencia directa sobre el gran dialéctico, ca. 1615, cuando intentó establecer la inconmensurabilidad de dos líneas considerando que una supuesta medida común no podría aplicarse a ninguna de las dos, porque la medida primero debe aplicarse a su mitad, y antes de eso a la mitad de la mitad y así sucesivamente hasta el infinito, lo cual es una operación tan imposible como la «Dicotomía» de Zenón.[6]

ESPECULACIONES DE GALILEO. Kepler y Cavalieri tuvieron mucho más éxito en la aplicación de los infinitesimales que los escritores anteriores, pero en este momento son más importantes para nosotros las especulaciones de Galileo. Galileo se acercó al problema de los conjuntos infinitos con una agudeza de enfoque y una originalidad que no fue igualada antes de los tiempos de Dedekind y Georg Cantor. Los diálogos de Galileo sobre mecánica *Discorsi e Dimostrazioni matematiche,* 1638. comienza el «primer día» con una discusión sobre la divisibilidad y la continuidad de la materia y el espacio.[7] Salviati, quien en general representa los puntos de vista del autor, dice,[8] «el infinito es inconcebible para nosotros, así como lo último indivisible». Simplicio, que en estos diálogos es el vocero de la filosofía escolástica aristotélica, señala que «la infinidad de puntos en una línea más larga debe ser mayor que la infinidad de puntos en una línea más corta». Entonces vienen las memorables palabras de Salviati:

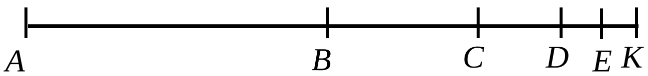
> «Estas dificultades surgen porque nosotros con nuestras mentes finitas discutimos lo infinito, atribuyéndole propiedades derivadas de lo finito y lo limitado. Sin embargo, esto no tiene justificación; porque los atributos grande, pequeño e igual no se pueden aplicar a lo infinito ya que no se puede hablar de infinitos mayores, menores e iguales... Si ahora yo pregunto cuántos cuadrados hay, alguien puede responder con certeza, tantos como raíces hay; porque todo cuadrado tiene una raíz,[9] toda raíz tiene un cuadrado, ningún cuadrado tiene más de una raíz, ninguna raíz tiene más de un cuadrado... No veo ninguna salida excepto la de decir: la totalidad de los números es infinita; la totalidad de cuadrados es infinita, la totalidad de raíces es infinita; la multitud de cuadrados no es menor que la multitud de números ni esta última es la mayor; y, finalmente, los atributos igual, mayor y menor no son aplicables a cantidades infinitas sino solamente a cantidades finitas.»

Galileo fue curiosamente mal interpretado por algunos escritores, incluyendo a Cauchy; según ellos aquí demuestra que no existe un infinito actual. El hecho de que hubiera tantos cuadrados como enteros se tomaba como absurdo; por lo tanto se consideraba refutada la existencia del infinito actual. En el siguiente pasaje sobre la caída de cuerpos se nota la destreza de Galileo en usar el infinito en demostraciones:[10]

> «Si la velocidad fuera proporcional a la distancia a través de la cual ha caído o va a caer, entonces esas distancias serían recorridas en tiempos iguales; esto es: si la velocidad con la cual un cuerpo avanza cuatro yardas es el doble de la velocidad para avanzar dos yardas, entonces los tiempos que se necesitan para estos dos procesos serían los mismos; pero cuatro yardas pueden ser atravesadas

en el mismo tiempo que dos yardas sólo en el caso del movimiento instantáneo. Por el contrario, lo que vemos es que el cuerpo necesita tiempo para caer, y que necesita menos tiempo para caer dos yardas que para caer cuatro yardas. Por lo tanto no es cierto que las velocidades se incrementan proporcionalmente a la distancia que han recorrido en su caída.»

GREGOIRE S. VINCENT. La discusión más importante sobre Zenón dada en este tiempo se debe a Gregoire S. Vincent, en su *Opus geometricum quadraturae circuli et sectioum coni*, publicada en Antwerp, en 1647, pero escrita aparentemente veinticinco años antes. Es un voluminoso libro de 1400 páginas. Influenciado en sus investigaciones geométricas por el concepto escolástico medieval del continuo, de acuerdo con el cual una línea dividida repetidamente no se reduce a elementos indivisibles, como enseñaban los atomistas, sino que admite ser dividida *ad infinitum.* Gregoire S. Vincent tomó un camino diferente al de Arquímedes: mientras que en sus pruebas Arquímedes seguía dividiendo sólo hasta que alcanzaba cierto grado de pequeñez, S. Vincent permitía que las subdivisiones continuaran *ad infinitum,* usando una sección ilimitada. En geometría presentó una serie geométrica que fue una verdadera serie *infinita.*[11] Esto lo había hecho por lo menos un escritor anterior a él,[12] pero, hasta donde sabemos, él es el primero en aplicar la progresión geométrica infinita en el estudio del «Aquiles».



Tomando un segmento de línea definido AK, lo divide en B en una razón dada, entonces divide BK en la misma razón en C, y así sucesivamente. Los segmentos AB, BC, CD, ... forman una progresión geométrica infinita. Los puntos C, D, E, ... caen, todos, entre A y K; se acercan a K tanto como queramos, pero (de acuerdo con la filosofía escolástica) nunca la alcanzan. Gregoire concibe este hecho como que K es un obstáculo, por así decirlo, que se opone al avance ulterior de la serie de puntos A, B, C, ..., similar a un muro rígido: «terminus progressionis est seriei finis, ad quem nulla progressio pertinget, *licet* in infinitum continuetur; sed quovis interuallo dato proprius ad eum *accedere* poterit.» Por «series» se entiende el segmento AK, por «progressio» los segmentos AB, AC, ... Gregoire plantea su conclusión así: «Dico magnitudinem AK aequalem esse toti progressioni magnitudinum continue propostionalium, rationis AB ad BC in infinitum continuatae terminum esse K.» Considerando el «Aquiles» en relación con esto, asocia esta paradoja sobre el movimiento, por primera vez, definitivamente con la suma de una serie infinita. Además, Gregoire S. Vicent es el primer escritor conocido que sabemos que dice el tiempo y el lugar exactos para alcanzar a la tortuga. Hasta donde pudimos averiguar, Gregoire no se preocupó, al explicar el «Aquiles», por el hecho de que en su teoría, la variable no *alcanza* su límite. Aparentemente, tampoco este problema preocupó a sus lectores. Su manera de resolver el problema convenció a muchos. Veremos que Leibniz hace una referencia especial sobre esto. Un siglo después de la publicación de Gregoire, Saverien en su diccionario[13] se refiere al «Aquiles», «dont Gregoire de Saint Vincent a fait voir la fauseté.»* Formey dio la explicación de S. Vincent en el Artículo «Movement» en la *Encyclopédie* de Diderot (1754) reimpresa después en la *Encyclopédie Methodique,* y en 1800 traducido en Padua al idioma italiano. La definición de un límite dada en la *Encyclopédie Methodique* no permite a la variable sobrepasar su límite pero no pone obstáculos en su manera de alcanzar su límite.

DESCARTES, DE MORGAN y OTROS. Alguna vez Descartes trató el «Aquiles». Su procedimiento es muy parecido al de Gregoire S. Vincent. Está en una carta dirigida a Clerselier en julio de 1646. [14] Hace que Aquiles, o en su lugar un caballo, esté, al comienzo, diez leguas atrás de la tortuga, pero moviéndose diez veces más rápidamente que ésta. No toca la verdadera dificultad de la paradoja, ya que dice:

> «L'Achille de Zenon ne sera pas difficile à soudre, si on prend garde que, si à la dixiéme partie de quelque quantité on adioute la dixiéme de cette dixiéme, qui est une centiéme, & encore la dixiéme de cette derniere, qui n'est qu'une milliesme de la premiere, & ainsi a l'infini, toutes ces dixiémes jointes ensemble, quoy qu'elles soient suposées réllement infinies, ne composent toutes-fois qu'une quantité finie, açauvoir une neusiéme de la premiere quantite... Et la caption est en ce qu'on imagine que cette neusiéme partie d'une lieue est une quantité infinie, à cause qu'on la divise par son imagination en des parties infinies» .

Descartes consideraba a lo realmente infinito como misterioso, pero no imposible ni absurdo. Parecía aceptarlo en lo abstracto, pero negarlo en lo concreto. En esta época y aun antes (véanse los extractos de Galileo citados anteriormente) se discutía sobre la incapacidad de la mente humana, finita, para concebir lo infinito. De Morgan ridiculizaba esto. Decía que si la mente humana fuera limitada, tácitamente postularíamos lo «imposible de conocer»; aun en el caso de que la mente humana fuera finita, no hay razón para pensar que no pudiera concebir lo infinito, así como no es necesario tener la mente azul para poder percibir un par de ojos azules. O, como De Morgan expresa en otra parte, el argumento se resume a decir que «aquel que conduce bueyes gordos debe estar gordo». Según De Morgan[15] esta doctrina es respaldada por muchos pensadores, desde Descartes hasta Hamilton, pero su génesis, como hemos visto, es muy anterior a Descartes.

Al francés Pierre Gassendi, el físico, en esa misma época le debemos una explicación totalmente diferente, aunque no por eso más convincente del «Aquiles». En su opinión las pruebas de Zenón no necesitan refutación, si como Epicuro suponemos que hay átomos y no puntos. La dificultad surge aparentemente de las diferencias en la velocidad del movimiento, pues un cuerpo para moverse sobre lo físicamente indivisible necesita el mismo tiempo que el que requiere otro cuerpo más rápido para recorrer varios indivisibles. En su opinión esta dificultad quizás se pueda superar si se concibe al movimiento como discontinuo, y al movimiento más lento como una mezcla de reposo y movimiento. Para los sentidos el movimiento seguiría pareciendo continuo.[16] El capuchino Casimir de Toulouse aporta una solución sencilla (para aquellos que tenían dificultad en aceptar la existencia de los átomos indivisibles) haciendo notar que los ángeles tenían extensión, aunque eran físicamente indivisibles.[17]

Vale la pena señalar que John Dee, el famoso astrólogo que escribió un prefacio matemático muy elaborado a la edición de Euclides de Billingsley (1570), difiere del debate de que dos líneas que contienen el mismo número de partes deben ser de igual longitud. Dice:

> «Nuestras Magnitudes menores pueden ser divididas en tantas partes como las mayores. Una línea de una pulgada de longitud (con vs) puede ser dividida en tantas partes como puede dividirse el diámetro de toda la Tierra de Este a Oeste: o hacia cualquier dirección.»

DISCUSIÓN DE TOMAS HOBBES. El primer escritor inglés, después de Duns Escoto, que se ocupa explícitamente de los argumentos de Zenón es el filósofo Tomás Hobbes (1588-1679). En 1655 escribió:[18]

> «La fuerza de aquel famoso argumento de Zenón contra el movimiento consistía en esta proposición, *todo lo que puede ser dividido en partes, infinitas en número, es infinito;* la cual él sin duda pensaba que era verdadera, pero sin embargo es falsa. Porque dividir algo en un número infinito de partes no es más que dividirlo en tantas partes como lo haría cualquier hombre. Pero no es necesario que una línea tenga un número infinito de partes, o que sea infinita, porque yo puedo dividirla y subdividirla tanto como yo quiera; porque por muchas partes que haga, su número es finito, porque el que dice partes, simplemente, sin añadir cuántas, no limita ningún número, sino lo deja a la determinación del oyente, por lo tanto decimos vulgarmente, que una línea puede dividirse infinitamente; lo cual no puede ser cierto en ningún otro sentido.»

Para Hobbes, *infinito* es sinónimo de *indefinido.* Toma una actitud agnóstica sobre los problemas del infinito:

> «Pero cuando no se dice nada más que esto, *el número es infinito,* debe entenderse como si se dijera, el sustantivo *número* es un sustantivo *indefinido*...Y, por lo tanto, aquello que vulgarmente se dice, que el espacio y el tiempo se pueden dividir infinitamente, no debe entenderse así, como si pudiera haber una división infinita o eterna, sino debe tomarse en este sentido, *todo lo que se divide se divide en partes tales que pueden dividirse a su vez...* ¿Quién puede afirmar que eso lo demuestra? 'Si el mundo fuera eterno entonces un número infinito de días o de otras unidades de tiempo precederían al nacimiento de Abraham, pero el nacimiento de Abraham precedió al de Isaac, entonces un infinito es más grande que otro o un eterno es mayor que otro eterno, lo cual', según él, 'es absurdo'. Esta

demostración es como la suya, él de esto: que el número de pares es infinito, concluiría que hay tantos números pares como simplemente números, o sea, que hay tantos números pares como números pares e impares juntos. Aquellos que de esta manera niegan la eternidad del mundo, ¿no están del mismo modo negando la eternidad del creador del mundo?... Y los hombres que razonan de esta manera tan absurda no son idiotas, sino, lo que hace a este absurdo imperdonable, geómetras, y eso los convierte en jueces, impertinentes, pero jueces severos de las demostraciones de otros hombres.»

Su referencia a los números pares e impares sin duda surgió de su contacto con el pensamiento de Galileo. Cuando residía en el Continente fue a ver a Galileo, entonces preso. Hobbes pensaba que había efectuado la duplicación del cubo y cuadrado el círculo. Sobre este tema se vio envuelto en una calurosa controversia con el algebrista John Wallis. El viejo Hobbes no era pieza para el joven Wallis en cuestiones matemáticas. Cuando salieron a la luz los trabajos matemáticos de Wallis, éste no permitió que se incluyera su controversia con Hobbes.[19] Uno de los puntos que se tocaban en esta disputa era que si el todo era mayor que una parte. Hobbes le dijo a Wallis «todas estas discusiones sobre el infinito no son más que ambiciones de escolares.» No se puede decir que Hobbes hiciera alguna contribución real para un entendimiento más profundo del Aquiles o dé algún otro argumento .sobre el movimiento. Su objeción hacía la proposición «todo lo que puede dividirse en un número infinito de partes es infinito», no es una contribución nueva, Aristóteles ya había llegado a eso. Sobre cómo Aquiles atrapa a la tortuga va más allá de la comprensión de nuestra imaginación sensorial; Hobbes en ninguna parte explica esta incapacidad. Sin embargo toca el concepto de límite en su controversia con Wallis. Hobbes denunciaba que algunos de los principios de los profesores «no tenían sentido» y uno de esos principios era «que una cantidad puede crecer cada vez menos eternamente, de modo que al último sería igual a otra cantidad; o lo que es lo mismo, que hay un fin en la eternidad». [20]

NOTAS:

1. K. Lasswitz, *Geschichte der Atomistik,* Hamburgo y Leipzig, I.Bd., 1890 , pp .283, 284 , 287. Ver también Max Simon, «Cusanus , als Mathematiker», *Festschr. H. Weber,* Leipzig y Berlin, 1912, pp. 298-337.
2. H. Boamans. "Sur quelques exemples de la méthode des límites chez Simon Stevin", *Annales de la société scientifique de Bruxelles,* T.37, 1912-13, 2. fascicule.
3. H. Bosmans, «Les démonstrations par l'analyse infinitésimale chez luc Valerio», *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* T.37, 1912-13, 2. fascicule; C.R. Wallner, «Ueber die Entstehung des Genzbegriffes», *Bibliotheca mathematica,* 3. F., Bd. IV, 1903, p. 250.

4. C.R. Wallner, *loc. cit.*, p. 257.
5. K. Lasswitz, *op. cit.,* Vol. II, p. 17.
6. J. C. Heilbronner, *Historia matheseos universae,* Lipsiae, 1742, p.175.
7. Véase una traducción al alemán en *Ostwald's Klassiker,* No. 11, pp. 24-37, también No.24, p. 17. Hay una traducción al inglés de las partes que tratan sobre conjuntos en E. Kasner en el *Bulletin am. Math. Soc.* Vol. XI, 1904-5, pp. 499-501.
8. *Ostwald's Klassiker,* No. 11, p. 29.
9. Siguiendo lo acostumbrado en sus tiempos, Galileo considera solamente una raíz de un número positivo, o sea la raíz principal.
10. *Ostwald's Klassiker,* No.24, p. 17.
11. Gregoire S. Vincent, *Opus geometricum,* T.l, pp. 51-56, 95-97 nuestro conocimiento de esta parte del libro se basa completamente en la reseña de C.R. Wallner en la *Bibliotheca mathematica*, 3.F., Vol. IV, 1903, pp. 251-255.
12. Véase H. Wiele1tner en *Bibliotheca mathematica,* 3.F., Vol. 14, 1914, pp. 150-168.
13. Savieren, *Dictionnaire universel de mathematique et de physique,* París, 1753, Art. «Mouvement».

    * «del cual, Gregoire de Saint Vincent hizo ver la falsedad».
14. *Ouvres de Descartes* por Charles Adaw y Paul Tannery, T. IV, pp. 445-447.

    ** «El Aquiles de Zenón no será difíci1 de resolver, si tomamos en cuenta que, si a la décima parte de cualquier cantidad se le añade la décima de esta décima, que es una centésima, y después la décima de esta última, que no es más que una milésima de la primera, y así hasta el infinito, todos estas décimas puestas juntas, aunque se supongan actualmente infinitas, no componen más que una cantidad finita, a saber, una novena de la primera cantidad... Y lo capcioso está en que nos imaginamos que esta novena parte de una legua es una cantidad infinita. por que la dividimos con nuestra imaginación en partes infinitas».
15. A. De Morgan. «On Infinity¡ and on the Sign of Equality» en Trans, of the Cambridge Philosoph, Society, Vol. XI. p. I57. Cambridge. 1871 [léase mayo 16. 1864).
16. Gassendi, *Opera ommia* 1658, I, p. 300a. An. I, p.239; Lasswitz, *Op. cit* Vol. II. p. 150.
17. Lasswitz. *Op. cit.,* Vol. II, p. 494.

18. *The English Works of Thomas Hobbes,* Vol. I, London, 1839, pp. 63,64, 413. Hobbes se refiere a los argumentos de Zenón también en sus trabajos en latín. Véase Thomas Hobbes, *Opera philosophica,* Vol. V, Londres. 1845, pp. 207-213.

19. En el *Hobbes* de Croom Robertson, pp. 167-185, hay una reseña completa de la controversia entre Hobbes y Wallis.

20. *The Eng1ish Works of Thomas Hobbes* Vol. 7, p. 186.

V

5. Bayls, Leibniz y otros escritores continentales

ESPECULACIONES DE PIERRE BAYLE. Pierre Bayle en el artículo «Zénon d'Elee», publicado en su *Dictionnaire historique et critique*, en 1696, presenta una discusión muy elaborada, detallada y crítica sobre los argumentos de Zenón y las refutaciones de Aristóteles. Nuestras citas son de la traducción inglesa del diccionario, publicada en 1710 en Londres. Bayle era un notable filósofo escéptico francés. Su artículo sobre Zenón ha sido ampliamente citado. Comienza con observaciones sobre la «flecha». Todos admiten, dice, que dos cuerpos no pueden estar en el mismo lugar al mismo tiempo; pero que «dos partes de tiempo no pueden existir juntas» es un teorema que «requiere un poco de más reflexión para comprenderlo». Bayle continúa:

> «Quedará más obvio con un ejemplo. Digo que lo que se puede decir del lunes y martes con respecto a la sucesión, se puede decir de cada porción de tiempo cualquiera que sea. Puesto que es imposible que lunes y martes existan al mismo tiempo, y como por necesidad el lunes debe dejar de ser para que el martes comience a ser, no hay porción de tiempo, cualquiera que sea, que pueda coexistir con otra; cada una debe existir sola; cada una debe empezar a ser, cuando la precedente ha dejado de ser; y debe cesar antes de que la siguiente pueda empezar a existir. De lo cual resulta, que el tiempo no es divisible *in infinitum* y que la duración sucesiva de las cosas se compone de momentos, propiamente dichos, cada uno de los cuales es simple e indivisible, perfectamente distinto del tiempo pasado y del futuro, y no contiene más que el tiempo presente. Aquellos que niegan esta Consecuencia deben rendirse a su Estupidez o su deseo de Sinceridad o al poder insuperable de sus prejuicios. Pero una vez que has admitido que el tiempo presente es indivisible, estarás inevitablemente obligado a admitir la objeción de Zenón. No podrás encontrar el instante cuando la flecha deja su lugar, puesto que si encuentras uno, éste estará al mismo tiempo en el mismo lugar y sin embargo no está allí. Aristóteles se contenta con responder que Zenón falsamente supone la indivisibilidad de los Momentos."

Este es el peculiar argumento de Bayle por medio del cual trata de mostrar que el tiempo está compuesto de un número finito de partes indivisibles, y que, como consecuencia de esta propiedad del tiempo, las dificultades del argumento de Zenón de que la flecha no se mueve, se eliminan satisfactoriamente. El ardor mostrado por Bayle al último nos hace pensar que él mismo encontraba refutable su propia explicación.

Aunque Bayle negaba la divisibilidad infinita del tiempo, admitía la divisibilidad infinita del espacio. Da el argumento de Zenón en el artículo «Dicotomía» y entonces dice contra Aristóteles:

> «A esto Aristóteles da una respuesta desventurada. Dice que un pie de materia que no es infinita más que en Potencia, puede muy bien recorrerse en un tiempo finito... Tenemos aquí dos Particulares: 1. Que cada parte de Tiempo es divisible *in infinitum;* lo cual está totalmente refutado anteriormente. 2. Que un Cuerpo solamente es infinito en Potencia. Lo cual significa que la Infinidad de un Pie de materia consiste en que puede ser dividida sin fin en partes más pequeñas, pero no en que sea realmente susceptible a esa división. Pedir esto es engañar al Mundo; porque si la Materia es divisible *in infinitum,* ésta de hecho contiene un número infinito de partes y por lo tanto no es un infinito en Potencia, sino es un Infinito que realmente y de hecho existe... ¿No es cierto que Aristóteles y sus discípulos aseveran que una Hora contiene una infinidad de partes? Y por eso cuando ha transcurrido debe reconocerse que una infinidad de partes existieron de hecho una después de la otra. ¿Es esto una infinidad virtual y no una infinidad actual? Vamos entonces a decir que esta Distinción es inválida, y que la. Observaciones de Zenón se mantienen en plena vigencia... Aquí vamos a contentarnos con observar que el subterfugio de la infinidad de Partes del Tiempo es inválido; porque si hubiese en una Hora una infinidad de Partes, nunca podría comenzar ni terminar.”

Lo que dice Bayle en su crítica a Aristóteles tiene una fuerza considerable; lo que dice por medio de un argumento constructivo —aceptar la divisibilidad infinita del espacio pero negarla para el tiempo— no convence. Bayle no dice casi nada sobre el «Aquiles» pero hace unas observaciones extensas, aunque poco interesantes sobre el «estadio».

Después de este examen preliminar sobre Zenón y Aristóteles, Bayle principia de nuevo diciendo que muy probablemente Zenón discutió otros argumentos que quizás fueron los mismos que aquéllos que Bayle mismo estaba a punto de mencionar, «algunos de los cuales se oponen a la existencia de la Extensión, y parecen mucho más fuertes que todas las Razones que puedan esgrimir los cartesianos». Continúa:

> «Me inclino a pensar que aquéllos que revivieran la Opinión de Zenón, deberían razonar así. 1. No hay Extensión, por lo tanto no hay Movimiento. La Consecuencia es buena, porque lo que no tiene Extensión no ocupa lugar, y lo que no ocupa lugar no puede pasar de un lugar a otro, ni, en consecuencia, moverse. Esto es indisputable: La dificultad está entonces en probar que no hay Extensión. Zenón pudo haber razonado así. La Extensión no puede componerse de puntos matemáticos, átomos o Partes divisibles *in infinitum;* por lo tanto su Existencia es imposible... Son suficientes pocas palabras con respecto a los puntos matemáticos; ya que... varias nulidades de extensión unidas nunca harán una Extensión. Consúltese el primer Cuerpo de Filosofía Escolástica que esté al alcance y se encontrarán las Razones más convincentes del Mundo, respaldadas por muchas Demostraciones Geométricas contra la existencia de esos Puntos».

Después de esta apelación a la filosofía escolástica sobre la imposibilidad de un continuo hecho de puntos, Bayle argumenta contra las partículas indivisibles extendidas, llamadas átomos epicúreos; su indivisibilidad es «quimérica», ya que cada átomo tiene un lado derecho y un lado izquierdo. La divisibilidad *in infinitum* lo conduce a las siguientes observaciones cáusticas:

> «La divisibilidad *in infinitum* es una hipótesis adoptada por Aristóteles, y casi todos los profesores de filosofía, en todas las universidades durante mucho tiempo. La tomaron no porque la comprendían o porque pudieran responder a las Objeciones que se le pueden hacer, sino porque habiendo claramente aprehendido la imposibilidad de los puntos matemáticos o físicos no encontraron otra salida más que ésta. Además esta hipótesis aporta importantes conveniencias: porque cuando sus Distinciones se han agotado sin poder hacer comprensible esta Doctrina, ellos se escudan en la naturaleza del Sujeto, y alegan que siendo limitado nuestro entendimiento, nadie debe sorprenderse de que ellos no puedan resolver lo relativo al Infinito, y que es esencial que dicha Continuidad, sea susceptible a tales dificultades que son insuperables por la Naturaleza Humana... Para convencerse de sus debilidades es suficiente recordar que la más fuerte de ellas [las tres hipótesis: puntos, átomos, partes infinitamente divisibles], que mejor refuta los fundamentos es la Hipótesis de la divisibilidad *in infinitum.* Los estudiosos la han vestido de pies a cabeza con todas las distinciones que todo su ocio les ha permitido inventar. Pero todo esto solamente sirve, en su situación de Estudiantes, de tema para hablar en una disputa pública, para que sus parientes no sufran la decepción de verlos mudos. Y en consecuencia un padre o un hermano se irían más satisfechos si el estudiante distingue entre un *Infinito Categoremático* y un *Infinito Sincategoremático* que si no hubiera contestado nada. Por eso fue necesario que los profesores inventaran una clase de jerga, pero todas las molestias que se tomaron nunca podrán ocultar esta noción que es tan clara y evidente como el sol: *Un número infinito de partes de Extensión cada una de las cuales se extiende, y es distinta de todas las demás, así como respecto a su Entidad, conforme tome lugar no puede estar contenida en un espacio cien millones de veces menor que la cienmilésima parte de un Grano de Cebada.*»

En la siguiente cita se ve que Bayle estaba pensando más en realidades externas que en los conceptos de la mente humana:

> «Lo que los matemáticos reconocen con respecto a Líneas y Superficies, con lo que demuestran tantas cosas excelentes, deben ser ciertas para los Cuerpos. Ellos admiten honestamente que las cosas con longitud y anchura sin profundidad no existen más que en nuestra Imaginación. Se puede decir lo mismo de las tres Dimensiones. No pueden tener lugar más que en nuestras mentes y tampoco pueden existir más que idealmente.»

Bayle dice que las demostraciones que se han dado para demostrar la divisibilidad infinita realmente prueban que la extensión no existe.

> «En primer lugar observo que algunas de esas demostraciones se usan en contra de aquellos que afirman que la materia está compuesta de Puntos Matemáticos. Se les ha objetado que los Lados de un Cuadrado serían iguales a la Diagonal y que entre Círculos concéntricos el menor seria igual al mayor. Esta Consecuencia se prueba haciendo parecer que las Líneas rectas que se trazan de uno de los lados del Cuadrado al otro llenarán la Diagonal y que todas las rectas que puedan ser trazadas desde la Circunferencia del Círculo mayor encontrarán lugar en la Circunferencia menor... En segundo lugar yo afirmo que siendo muy cierto que si los Círculos existieran, se podrían trazar tantas rectas de la Circunferencia al centro como partes hay en la Circunferencia, lo que implica que la existencia de un círculo es imposible. Se me permitirá decir que todo Ser que no pueda existir, sin contener propiedades que no pueden existir, es imposible: Pero no puede existir una Extensión redonda sin tener un centro, en el cual se crucen tantas rectas como partes hay en la circunferencia; y lo cierto es que tal centro no podría existir; Entonces debe aceptarse que la Existencia de esta Extensión redonda es imposible,»

En el siguiente párrafo de Bayle se exhiben más indicaciones de las dificultades encontradas en el esfuerzo para construir un continuo no contradictorio:

> «...un Cuerpo en movimiento rodando sobre una mesa inclinada no podría caerse nunca de la mesa; porque antes de que caiga, debe necesariamente tocar la última parte de la mesa. Y ¿cómo va a tocar esta última parte si aquellas partes que se tomen como la última contienen una infinidad de partes, y un número infinito no tiene una parte que pueda ser la última? Esta objeción obligó a algunos filósofos escolásticos a suponer que la naturaleza tiene entremezclados puntos matemáticos y partes divisibles *in infinitum* con el objeto de que estos puedan servir para conectarlos y así componer los extremos de los Cuerpos.»

Y en conclusión dice Bayle:

> «Así... podemos suponer que nuestro Zenón de Elea se opone al movimiento. Yo no aseguraré que sus Razones lo persuadieron de que nada se moviera... Si yo tuviera que juzgarlo, debería afirmar que tanto él como otros creían en el movimiento de la Extensión, porque aunque me considero incapaz de resolver todas las dificultades que acabamos de ver... Estoy convencido de que la exposición de estos argumentos puede ser muy útil en relación con la Religión... La ventaja que derivo de estas especulaciones no es solamente la de adquirir este tipo de Conocimiento, que de por si es muy árido; sino aprender a conocer las fronteras de nuestro entendimiento.»

Bayle habla también sobre el sofista Diodoro que disertaba contra la existencia del movimiento,[1] habiéndose dislocado su hombro, fue con un médico para que se lo pusiera en su lugar. ¿Cómo? dijo el doctor. ¡Tu hombro está fuera de lugar! Eso no puede ser: porque, si se movió, o lo hizo en el lugar donde estaba o en el lugar donde no estaba. Pero éste no se movió ni en el lugar donde estaba, ni en el lugar donde no estaba, porque éste no podría actuar ni sufrir en el lugar donde no estaba.

El artículo de Bayle, a pesar de ser la discusión más completa sobre Zenón hasta esa fecha, no es una contribución esclarecedora. Este artículo fue preparado sin mucha coordinación. Al principio Bayle aprueba la divisibilidad infinita del espacio, después habla con desdén de los seguidores de esta idea. No menciona el importante trabajo de Gregoire S. Vincent. En general toma una actitud escéptica en este artículo.

ENFOQUE DE LEIBNIZ. Cuando Bayle preparó su artículo, Leibniz mencionó el «Aquiles» en su correspondencia con el filósofo francés Foucher. Adelantamos que la falta de espacio aquí nos impide intentar una exposición sistemática de los infinitesimales de Leibniz y del uso de éstos en su cálculo. Como Newton, con el transcurso de los años, Leibniz cambió su punto de vista sobre algunos conceptos fundamentales de las matemáticas. Este cambio de base no puede tomarse como un cargo contra ninguno de los dos. Fueron encontrando problemas más sutiles, en varios campos diferentes de investigación; sus ideas estaban en un estado de flujo. Se debe a esta circunstancia, como Vivanti lo ha señalado,[2] que diferentes autores han atribuido a Leibniz contradicciones, y cada uno de ellos ha podido respaldar estas acusaciones citando directamente a Leibniz. De este modo Wolff Achard, Gerdil y Mansion negaron que Leibniz admitiera la existencia de infinitesimales diferentes de cero; Grandi dice lo contrario; Cohen y Lasswitz atribuyen a Leibniz el concepto de infinitesimal intensivo, o sea un infinitesimal considerado como generador de magnitud finita, aunque él mismo no tuviera magnitud. En marzo de 1693 Foucher escribió a Leibniz pidiéndole información sobre cómo Leibniz podía admitir consistentemente divisibles y también indivisibles, y trata las dificultades de las distintas alternativas: instantes indivisibles que corresponden a puntos divisibles o instantes divisibles que corresponden a puntos indivisibles, o instantes divisibles que corresponden a puntos divisibles. En el caso de la última alternativa «on ne pourra resoudre la difficulté des Sceptiques, ni montrer comment Achille doit aller plus vi te qu'une tortue"*[3] A esto Leibniz replica[4] que veinte años antes é había escrito dos discursos sobre el movimiento que podían contener algunas cosas de valor pero que tenían partes sobre las. cuales ahora él se consideraba mejor informado, «et entre autres, je m'explique tout autrement aujourdhuy sur les indivisibles. C'etoit l'essay d'un jeune homme qui n'avoit pas ancor approfundi les mathématiques».** Partes posteriores en esta carta son interesantes con relación a los conceptos recientes de átomo, así como con respecto a la teoría moderna del continuo.

> «Quand aux *indivisibles,* lors qu'on entend por là les simples extremités du temps ou de la ligne, ou n'y sçauroit concevoir de nouvelles extremités n'y des parties actuelles ny potentielles. Ainsi les points ne sont ny gros ny petits et il ne fault point de saut pour les paser. Cependant le continu, quoy qu'il ait partout de tels indivisibles n'en est point composé, comme il semble que les objections de Sceptiques le supposent, qui, à mon avis, n'ont rien d'insurmontable, comme on trouvera en les redigeant en

forme. Le père Gregoire de S. Vincent a fort bien montré par le calcul même de la divisibilité à infini, l'endroit où Achille doit attraper la tortue qui le devance, selon la proportion des vitesses. Ainsi la Geometrie sert à dissiper ces difficultés apparentes. Je suis tellement pour *l'infini actuel,* qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit, vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son auteur. Ainsi je crois qu'il n'y a aucune partie de la matiere qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuel1ement divisée, et par consequent la moindre particelle doit estre considerée comme monde plein d'une infinité de creatures differentes.» ***

Es interesante observar que el comentario de Leibniz sobre la explicación del «Aquiles» dada por Gregoire S. Vincent fue favorable, al igual que todos los comentarios que conocemos. Era una época, en la que se veía generalmente a un círculo como un polígono con un número infinito de lados; por lo tanto, no podíamos esperar más refinamientos. Digno de mención es un pasaje en una carta de Leibniz [5] a John Bernoulli I, fechada en agosto 22 de 1698, en la cual declara que Burcher de Volder, y Gregoire S. Vincent antes que él rechazaron el axioma de que el todo es mayor que su parte cuando se aplica a lo infinito. Volder era un hombre prominente en los Países Bajos, como se aprecia del hecho de que fue seleccionado para editar los trabajos de Huygens. Leibniz no podía estar de acuerdo con los científicos holandeses y decía que sus puntos de vista eran absurdos. Es interesante ver cómo esta idea de que el todo no es mayor que algunas de sus partes, tan claramente expuesta por Galileo para los conjuntos infinitos, de cuando en cuando se impuso a la atención de los hombres que consideraban el tema del infinito. El español Juan Andrés[6] cita con aprobación. del libro muy usado de Christian Wolff, *Elementa mathescos universae* (Arth. num. 86), una prueba del teorema de que «el todo es mayor que su parte». Por otro lado, el punto de vista contrario sostenido en el siglo diecisiete (como hemos visto) por Galileo y Volder, halló eco en el siglo dieciocho en un libro de Johann Schultz.[7]

ALGUNAS DISCUSIONES EN EL SIGLO DIECIOCHO. Mientras en el siglo diecisiete tuvo lugar una considerable discusión sobre los argumentos de Zenón, por escritores como Biancani, Gregoire S. Vincent, Peter Bayle, Descartes y Leibniz, durante el siglo dieciocho se dijo muy poco sobre este tema. Hubo una tremenda actividad durante el siglo dieciocho en el desarrollo más completo del cálculo diferencial e integral y sus aplicaciones. Con él vino un desarrollo más sistemático de la teoría de límites, pero ese desarrollo no fue tal que realmente arrojara mucha luz nueva sobre la divisibilidad infinita o la capacidad de las variables para alcanzar sus límites. Podría decirse mucho sobre las discusiones del infinito, pero nosotros confinaremos nuestra atención a los puntos de vista que están más directamente relacionados con el objeto de nuestra investigación.

El filósofo y filólogo italiano Jacopo Facciolati, de Padua, escribió sobre el «Aquiles» en *Acroases dialectical,* Venetiis, 1750. Según Hoffbauer[8] Facciolati hace una suposición, de acuerdo con la cual la tortuga nunca es alcanzada aunque no se establece allí el argumento supuesto por Zenón de que el más rápido no puede alcanzar al más lento. Supongamos que *a, b, c, d*,... son puntos sobre una línea, tales que la distancia *bc* es una décima de la distancia precedente *ab*, etc. La suposición adicional era para que tanto Aquiles como la tortuga hicieran paradas en los puntos *a, b, c*,... de modo que el tiempo de tránsito de una letra a la otra no cayera abajo de un cierto mínimo. Esta solución de la paradoja no puede considerarse como un avance real. Más inquisitivo fue el Padre Gerdil (1718-1802) de Turín, quien ocupaba un alto puesto como profesor y fi1ósofo, y finalmente recibió un bonete de cardenal. En su artículo *De l'infini absolu consideré dans la Grandeur,*[9] cita un artículo del filósofo y profesor de matemáticas francés l'abbé Deidier (1696- ca. 1746), quien dijo que la conclusión de Zenón es absurda, excepto en dos suposiciones: la primera es que Aquiles tomó un número infinito de pasos para cubrir la primera legua, en cuyo caso nunca alcanzó su meta; la segunda es que cuando pasó $\frac{1}{10}$ de la distancia anterior, sus pasos también se hicieron diez veces más cortos, de manera que no pudo alcanzar a la tortuga. Como ambas suposiciones son ridículas e imposibles, se deduce que el argumento de Zenón no es más que un sofisma. Si alguien objeta diciendo que Aquiles debe recorrer $\frac{1}{9}$ de legua, lo cua1 no puede hacer ya que tiene que pasar por una progresión infinita $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000},$, yo respondo que este es un sofisma tan simple como el primero, porque Aquiles viaja continuamente a una velocidad uniforme .

El padre Gerdil respalda los puntos de vista del abad Deidier. El mismo señala que si la tortuga tiene al principio la ventaja de una legua, recorre una distancia x antes de ser alcanzada, donde x está determinada por $10x ? 1 ? x$. Su manera de resolver el «Aquiles» consiste en evitar la suma de una progresión infinita por medio de 1a adición de sus términos, y en determinar de golpe el valor representado por esa progresión. Una progresión infinita no tiene un último término, sin embargo, dice él, el número de términos no constituye un infinito verdadero. Su argumento en contra de la posibilidad de un infinito verdadero tomó relevancia con Cauchy.[10]

Llegando a Alemania, nos encontramos primero con una publicación filosófica de Johann Gottlich Waldin, profesor de matemáticas en Marburg, quien declara inválidas las pruebas de Zenón, porque Zenón supone la existencia del movimiento que era exactamente lo que estaba en discusión.

NOTAS:

1. Sexto Empírico. lib. 2, c. 22.

2. Giulio Vivanti. «Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. Saggio storico»: *Giornale di mateluatiche di Battaglini*, Vol. 38 y 39, Estratto. Nápoles. 1901, p. 11. Esta investigación es muy valiosa, ya que contiene citas extensas de un gran número de fuentes originales, muchas de las cuales son de difícil acceso.

3. *Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz,* herausgegeben v. C.I. Gerhardt. Bd. I, Berlin, 1875, p. 411.

* "no se podrá resolver la dificultad de los escépticos, ni mostrar cómo Aquiles debe ir más rápido que la tortuga".

4. *Loc.cit.*, p. 415.

** «y entre otras, yo me explico ahora todo sobre los indivisibles de otra manera. Era el intento de un joven que no había profundizado todavía en las matemáticas».

*** «En lo que se refiere a los indivisibles, entiendo por eso los simples extremos del tiempo o de una línea. donde uno no podría concebir extremos nuevos ni partes actuales ni potenciales. De tal manera que los puntos no son ni grandes ni pequeños, y no sería necesario ni un punto de salto para pasarlos. Sin embargo el continuo, no importando que haya tales indivisibles por todos lados, no está compuesto de puntos, como parece que las objeciones de los escépticos lo suponían, que, según mi punto de vista, no tienen nada de insuperables, como se encontrará al redactarlos formalmente. El padre Gregorio de San Vincent ha mostrado muy bien a través del cálculo mismo de la divisibilidad al infinito, el punto donde Aquiles debe atrapar a la tortuga que va adelante, según la proporción de las velocidades. De esta manera la Geometría sirve para disipar las dificultades aparentes. Yo apoyo tanto al infinito actual, que en vez de admitir que la naturaleza lo aborrece, como se dice vulgarmente, yo sostengo que ella lo presenta en todas partes para señalar mejor las perfecciones de su autor. De esta manera yo creo que no hay ninguna parte de la materia que no sea, no digamos divisible, sino de hecho dividida y en consecuencia, la partícula más pequeña debe ser considerada como un mundo lleno de una infinidad de creaturas diferentes.»

5. Got. Gul. Leibnitii et Johan. BernQullii *Comercium Philosophicum et mathematicum,* T.1, Lausanne y Ginebra, 1745, pp. 389, 397.

6. Juan Andrés, *De studiis philosophicis et matematicis,* Madrid, 1789.

7. J. Schultz, *Versuch einer genauen Theorie des Unend1ichen,* Königsberg y Leipzig, 1778, p. 87.

8. J.S. Ersch y J.G. Gruber, Allg. Encyclopädie der Wissensch. u. Künste Leipzig, 1818, Art. «Achilles».

9. *Mélanges et philosophiee de mathématique de la Société Koynle de Turin,* 1760-1761, Suppl., p. l. Georg Cantor da también el siguiente artículo de Gerdil: "Essai d'une démonstration mathématique contre l'existence éternelle de la matiere et du mouvement, déduite de l'impossibi1ité demontrée d'une suite actuellement infinie de terms, soit permanents, soit successifs" [Intento de una demostración matemática contra la existencia eterna de la materia y del movimiento, deducida de la imposibilidad

demostrada de una sucesión actualmente infinita de términos, ya sean permanentes, ya sean sucesivos], *Opere ed!te et inedite del cardinale Giancinto, Sigismondo Gerdil,* T. IV, p. 261, Roma, 1896.

10. Véase Georg Cantor, "Ueber die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das actuale Unendiche", *Zeitsch. F. PlIilos. u. Philos. Kriik*, Bd. 88, p. 224.

11. J. G. Waldin, *Erste Gründe der allgemeinen und besondern Vernunftlehre,* Marburg, 1782, p. 26. Nuestra información acerca de Waldin está tomada de una historia de los argumentos de Zenón de Eduard Wellwann, titulada "Zenos Beweise gegen die Bewegung und ihre Widerlegungen", en *Programm des Friedrichs gymnasiums su Frankfurt A.O., für das Schuliahr* 1869-1870. Frankfurt A.O. 1870, p. 14.

VI

6. Newton, Berkeley, Jurin, Robins y otros.

El meollo del «Aquiles» está en si ciertas variables pueden alcanzar sus límites o no. Por esta razón las declaraciones de Newton sobre este punto son interesantes:

> «... esas razones últimas con las cuales las cantidades se desvanecen no son verdaderamente las razones de cantidades últimas, sino límites hacia los cuales siempre convergen 1as razones de cantidades decreciendo sin límite; y a los cuales se aproximan más cerca que cualquier diferencia dada, pero nunca ni van más allá ni en efecto los alcanzan hasta que las cantidades se disminuyan *in infinitum*.»[1]

En el siguiente pasaje se ve más claro que Newton deja a sus variables alcanzar sus límites:

> «Las cantidades, y las razones de las cantidades que en cualquier tiempo finito convergen continuamente a la igualdad, y antes de que termine ese tiempo se aproximan una a la otra cada vez más que cualquier diferencia dada, finalmente llegan a ser iguales.» [2]

En otros pasajes del primer libro del *Principia* se permite a 1as variables alcanzar sus límites. Aunque la exposición de Newton no es tan explícita como uno quisiera, ni está libre de críticas, merece el crédito de percibir que las variables pueden alcanzar sus límites y que las variables que se presentan en la mecánica usualmente son, de naturaleza tal que efectivamente alcanzan sus límites.

Como es bien sabido, los fundamentos del «cálculo fueron severamente atacados por el obispo Berkeley. Su primera declaración publicada sobre este tema aparece en su *Alciphron, or the Minute Philosopher* (1732), escrita cuando él y su esposa residían en Newport, Rhode Island. Dice que la ciencia matemática no llega a tener «esas ideas claras y distintas» que muchos «esperan y sobre las que insisten» en los misterios de la religión... como «las que han surgido en geometría sobre la naturaleza del ángulo de contacto, la doctrina de las proporciones, de los indivisibles, los infinitesimales y otros puntos diversos». Dice que así como las matemáticas, aunque envueltas en obscuridades, se consideran excelentes y útiles, también los artículos de la fe Cristiana deben aceptarse como no menos verdaderos y excelentes, debido a que proporcionan material de controversia. Berkeley desarrolla en forma más completa estas ideas en su *Analyst* (1734) y en la *Defence of Frée-thinking in Mathematics* (1735). Estos ataques a los fundamentos del cálculo merecen mencionarse aquí, aunque no hacen referencia a Zenón. Berkeley estaba familiarizado con los argumentos de Zenón ya que en un ensayo anterior se refiere a ellos dos veces, aunque sin comentario crítico.

El *Analyst* es un discurso dirigido a un infiel matemático cuyo nombre no menciona, pero se cree que era el Dr. Halley. Todo el discurso de Berkeley trata principalmente sobre dos puntos:

(1) La concepción de fluxiones es ininteligible ya que son 1as razones de cantidades que no tienen magnitud, (2) la derivación de la fluxión de x^n se apoya en una violación de un canon axiomático de razonamiento profundo. Newton no tomó las fluxiones infinitamente pequeñas, sino originalmente como los *momentos de fluxiones* como infinitamente pequeños. Después descartó lo infinitamente pequeño y explicó las fluxiones con su teoría de razones primeras y últimas. Berkeley argumentaba con gran agudeza contra lo infinitamente pequeño. Como sus argumentos no se aplican directamente a la "dicotomía" y al " Aquiles" no vamos a entrar en detalles excepto para citar parte de la *Query* 21 en su *Analyst*, donde se pregunta "si la supuesta divisibilidad infinita de extensión finita ¿no ha sido una trampa y una espina para los matemáticos?" Antes de esto Berkeley había discutido esta cuestión vital ampliamente en sus *Principies of Human Knowledge*, impreso por primera vez en 1710 y nuevamente en 1734. La divisibilidad infinita, a causa de que es inaprehensible por nuestros sentidos queda descartada de su filosofía por falta de significado o por involucrar contradicciones, Citamos lo siguiente:[4]

> "Y, esta noción es la fuente de la cual surgen todas esas divertidas paradojas geométricas que tienen una repugnancia tan directa al simple sentido común de la humanidad, y son admitidas con tanta renuencia en la mente todavía no corrompida por el aprendizaje...Ultimamente las especulaciones sobre infinito han llegado tan lejos, y se han transformado en nociones tan extrañas que han provocado no pocos escrúpulos y disputas entre los geómetras de la presente época. Hay algunos de gran renombre quienes, no contentos con sostener que las líneas finitas pueden dividirse en un número infinito de partes, sostienen además que cada uno de esos infinitesimales es en sí subdivisible en una cantidad infinita de partes o infinitesimales de segundo orden, y así sucesivamente *ad infinitum*. Estos, yo digo, aseguran que hay infinitesimales de infinitesimales, etc., sin llegar nunca a un final; de modo que según ellos una pulgada no contiene simplemente un número infinito de partes, sino una infinidad de una infinidad *ad infinitum* de partes. Hay otros que sostienen que todos los órdenes de infinitesimales abajo del primero no son nada en absoluto; ... ¿No tenemos razón para concluir que *ambos* están equivocados y que no hay en efecto ninguna cosa como partes infinitamente pequeñas o un número infinito de partes contenidas en cualquier cantidad finita?... Si se puede decir que (varios teoremas indudablemente verdaderos) se descubren por métodos en los cuales se hace uso de los infinitesimales, lo cual no podría haber sido posible si su existencia incluyera una contradicción en sí misma, yo respondo que mediante un examen completo se encontrará que en ningún momento será necesario usar o concebir partes infinitesimales de líneas finitas ni tampoco cantidades más pequeñas que el *mínimo sensible;* más aún, es evidente que esto nunca se podrá hacer porque es imposible. Y sea lo que sea lo que puedan pensar los matemáticos acerca de las fluxiones o del cálculo diferencial

y lo que se le parezca, un poco de reflexión les mostrará que trabajando con esos métodos ellos no conciben ni imaginan líneas o superficies menores que las que son perceptibles por los sentidos.

El *Analyst* dio lugar a una discusión acalorada. Apareció una respuesta anónima por Philalethes Cantabrigiensis con el título de *Geometry, no Friend to Infidelity; or a Defence of Sir Isaac Newton and the British Mathematicians,* Londres, 1734. La paternidad literaria de esta carta ha sido atribuida a Conyers Middleton ya Robert Smith, pero George A. Gibson dice claramente que el autor es James Jurin,[5] un notable médico de Cambridge y un admirador de la filosofía newtoniana, que él había tomado directamente de Newton. Philaletes admite que la doctrina de las fluxiones tienen dificultades, pero alega que no son insuperables. Gibson califica a esta contestación como «una defensa extremadamente débil» de la doctrina de las fluxiones. En 1735 Berkeley publicó su*Defence. etc.* aludida anteriormente, a la que Philaletes contestó en un folleto titulado*The Minute Mathematician: or the Freethinker no just Thinker.* Berkeley no respondió a esto ni a una publicación que apareció en Londres en el mismo año bajo el título: *A Discourse Concerning the Nature and Certainty of Sir Isaac Newton's Methods of Fluxions and of Prime and Ultimate Ratios,* debida a Benjamin Robins, un matemático e ingeniero militar. Surgió una controversia entre Philaletes y Robins que está más relacionada con el tema de nuestro trabajo que la controversia entre Philaletes y Berkeley. Robins y Philaletes diferían en su interpretación de Newton: ellos «empezaron esa larga lucha en la cual», como lo dice Gibson, «Robins probó su inmensa superioridad sobre su antagonista, parecidos en temperamento, en conocimientos generales de matemáticas y en el conocimiento especial sobre el método fluxionario de Newton».

La parte del debate que nos interesa en este momento se refiere a la variable que llega a su límite. Sobre este punto la visión de Robins estaba de alguna manera circunscrita; sostenía que no era posible que una variable llegara a su límite. Esta interpretación sobre Newton varía un poco de la que normalmente se acepta. Para los propósitos del debate era indudablemente más fácil para Robins limitarse a las variables que no llegan a sus límites; desde el punto de vista de la teoría matemática de que debería ser suficientemente amplia para explicar todo fenómeno ordinario de movimiento, su posición era desafortunada. Dice Robins:

> «Se requería que las cantidades o razones que este método aseguraba que eran finalmente iguales, fueran frecuentemente tales que nunca pudieran coincidir en absoluto. Como por ejemplo, los paralelogramos inscritos dentro de una curva, en el segundo lema del primer libro del *Principia* de Isaac Newton, no pueden por ninguna división hacerse iguales al espacio curvilíneo en el que están inscritos, mientras que en ese lema se asevera que finalmente son iguales a ese espacio.
>
> «Aquí se han dado dos métodos diferentes de explicación. El primero, suponiendo que por igualdad final se entiende una coincidencia asignable real, asegura que estos paralelogramos y el espacio curvilíneo llegan a ser en realidad, perfecta y absolutamente iguales entre sí».

Este último punto de vista descrito por Robins era el punto de vista de Jurin. Sin duda Jurin seguía más de cerca las huellas de Newton que Robins. Newton declara que la variable se hace «finalmente igual» a su límite, no obstante Robins insiste en que Newton debía haber visto que siempre permanecerían desiguales. Si una variable llega a su límite o no, depende totalmente de la variable, entonces el argumento de Robins difícilmente era válido. Ahora la mente humana puede establecer artificialmente una ley de variación. Esa ley puede ser tal que la variable llegue a su límite, o puede ser tal que la variable no llegue a su límite. Aparentemente, Robins quizás inconscientemente suponía leyes de variación que mantenían a la variable y a su límite constantemente separados, mientras que el gran Newton concibió modos de variabilidad que no se limitaban a esas condiciones. En el siguiente pasaje Robins explica como llegó a insistir que sus puntos de vista se deducían del *Principia* de Newton, cuando dice:

> «[Newton] ha dado una interpretación de este método que de ninguna manera requiere de esa coincidencia. En su explicación de esa doctrina de razones primeras y últimas, define la magnitud última de cualquier cantidad variante como límite de esa cantidad variante a la cual se puede aproximar con cualquier grado de acercamiento, y sin embargo nunca puede pasar. Y de manera parecida la razón última es el límite de esa razón variante.»

El lector puede comparar este pasaje de Robins con los pasajes del *Principia* de Newton que citamos antes. Gibson muestra que Philaletes no le hizo justicia a Newton. De acuerdo con Philaletes una razón última no es el *límite* de una razón variando, sino el último valor de una razón. Berkeley muy apropiadamente argumentaba que no hay último valor de los aumentos excepto el cero, de modo que la frase «la razón con la cual se desvanecen», usada por el mismo Newton, no representa ninguna operación matemática, y requiere de explicación. Gibson afirma que la terminología de Newton de las razones primera y última no era muy afortunada, «ya que se presta muy fácilmente a una interpretación en el sentido de los indivisibles; y era esta interpretación sobre la que discutían Berkeley y Philaletes. Si esa interpretación fuera correcta, entonces los argumentos de Berkeley en lo más importante estarían completamente justificados».

Podemos resumir la discusión diciendo que Berkeley no investigó directamente si Aquiles atrapaba o no a la tortuga; que de acuerdo con las enseñanzas de Newton y Jurín sobre límites, Aquiles si atrapó a la tortuga, aunque no es muy evidente como se llevó a cabo la hazaña; que la teoría de Robins no permitía que Aquiles alcanzara a la tortuga, aunque Aquiles se acercaba peligrosamente.

Fue en 1710 cuando se tradujo del francés al inglés el famoso diccionario de Bayle. No nos es posible rastrear ninguna influencia inmediata del artículo sobre «Zenón de Elea» en el pensamiento inglés. En 1713 apareció el *Clavis Universalis* del sacerdote inglés Arthur Collier, un idealista que pretendía probar en su libro la inexistencia del mundo externo. Como su quinto argumento considera al movimiento. No menciona a Zenón, ni a ningún otro filósofo, pero merece ser catalogado entre los discípulos más arrojados y temerarios de Zenón. Bastan algunas citas:[6]

> «Un mundo, en el cual es tanto posible como imposible que haya tal cosa como el movimiento, no es en absoluto;
>
> "Pero este es el caso del mundo externo;
>
> "Ergo, no existe tal mundo.
>
> «...Ahora en dicha traslación el espacio o la línea a través de la cual se supone que pasa el cuerpo que se mueve, debe en realidad estar dividida en todas sus partes. Esto está supuesto en la misma idea del movimiento; pero este todo es infinito, y este infinito es absurdo, y en consecuencia lo es igualmente, que deba haber cualquier movimiento en el mundo externo.
>
> ... afirmar que una línea, por medio de movimiento o de otra manera se divide en partes infinitas, es en mi opinión decir todos los absurdos del mundo al mismo tiempo. *Primero,* porque esto supone un número realmente infinito, es decir, un número al cual no se le puede añadir ninguna unidad, y es un número del que no hay suma total, o sea, no hay número en absoluto; en *segundo* lugar, como consecuencia, por esto se entiende que el movimiento más corto viene siendo igual al más largo, ya que un movimiento al que no se le puede añadir nada necesita ser tan largo como sea posible. En *tercer* lugar, esto también hará a todos los movimientos iguales en rapidez, siendo imposible que el más rápido en cualquier tiempo establecido haga algo más que pasar a través de puntos infinitos, lo que con todo se supone que lo haría el más corto.»

Collier no da ninguna evidencia de haber estudiado matemáticas superiores como lo hicieron Berkeley y Hume. Después de referirse al ángulo de contacto entre un círculo y su tangente, el cual es «infinitamente menor que cualquier ángulo rectilíneo», Hume concluye «que todas las ideas de cantidad sobre las cuales los matemáticos razonan son muy particulares, y como tales son sugeridas por los sentidos y la imaginación y en consecuencia no pueden ser infinitamente divisibles».[7]

Parece que los argumentos de Zenón casi no fueron discutidos en Inglaterra durante la segunda mitad del siglo dieciocho. Charles Hutton se refiere a ellos en el artículo «Zeno, Eleates» en su *Mathematical and Philosophical Dictionarv,* Londres, 1795. Describe al «Aquiles» y hace notar que «la falacia muy pronto se detectará», ya que fácilmente puede calcularse el tiempo cuando Aquiles no sólo haya alcanzado, sino rebasado efectivamente a la tortuga.

Algunos matemáticos ingleses se mantuvieron en el camino trazado por Newton, enseñando que una variable alcanza su límite. Especialmente se cumple esto con los matemáticos de Cambridge, desde Jurin hasta Whewell y desde Whewell hasta Todhunter. Whewell dice:[8]

«Se dice que una magnitud es *finalmente igual* a su Límite; y se dice que los dos están *finalmente en una razón de igualdad*».

Hutton, quien era profesor de matemáticas en la Royal Military Academy Woolwich, dice en su *Dictionarv,* bajo la palabra «Límite» que la variable «nunca puede ir más allá de él». August De Morgan hace una exposición diferente. En el artículo «Progressions» en la *Penny Ciclopaedia* (Londres, 1841), dice de Aquiles: «Dejémoslo ir tan lejos como pueda; siempre debe llegar hasta donde estaba la tortuga antes de que él pueda alcanzar ese punto; así que se requiere un *número infinito de partes de tiempo,* pero aquí el sofisma silenciosamente introduce *un tiempo infinito* para alcanzar a la tortuga».

De Morgan establece las dos series convergentes, una para el tiempo y la otra para la distancia, recorridas por Aquiles, pero ignora la cuestión crucial que es alcanzar el límite. En el artículo «Límite» dice que la variable «nunca debe llegar a ser igual» a su límite. Consecuentemente a la exposición sobre límites de De Morgan, dada en estos artículos, le hace falta la generalidad necesaria para explicar el «Aquiles».

En el Continente prevalecía la misma diversidad de definiciones de un límite. D'Alembert en 1754 no pone restricciones a la variable para alcanzar su límite; [9] solamente la variable no debe «surpasser la grandeur dont elle approche».* Es bien sabido que hubo un tiempo en el que Lagrange estaba muy preocupado por la falta de rigor en los fundamentos del cálculo. Decía:

> «Ese método [de límites] tiene el gran inconveniente de considerar cantidades en el estado en que, por así decirlo, dejan de ser cantidades; porque aunque siempre podemos concebir la razón entre dos cantidades, en tanto éstas sigan siendo finitas, la razón no ofrece a la mente una idea clara y precisa en cuanto sus términos se convierten uno y el otro, en nada al mismo tiempo." [10]

En el siglo diecinueve Carnot[11] y Cauchy[12] no pusieron restricciones sobre las variables que alcanzan sus límites. En 1817 Bolzano, cuyos escritos no recibieron en su época la atención que merecían, estaba ocupado con los límites de las funciones continuas que alcanzan sus límites.[13] Más tarde algunos escritores franceses pensaron que era necesario poner restricciones. Con Duhamel[14] la variable «nunca alcanza» su límite. En Alemania Klügel[16] da una definición sin poner restricciones, pero en los comentarios que siguen se describe a la variable sin alcanzar su límite. En 1871 Hermann Hankel comienza su artículo "Grenze" definiendo lo que se llama límite en matemáticas; el límite no es alcanzado. A la diferencia entre una variable y su límite le llama una cantidad infinitamente pequeña —una cantidad de la cual ningún múltiplo puede producir la unidad. Pero las magnitudes de esa clase, según Euclides V. Def. 4, son tales que algún múltiplo de una excederá a la otra. Luego entonces una línea infinitamente pequeña no es de la misma clase que una finita. Esta contradicción es para Hankel uno de los indicadores de que todavía hace falta un tratamiento científico de los límites. Hankel procede a expresar su adhesión al infinito actual y a desarrollar una definición más satisfactoria, libre de restricción, en cuanto a la obtención del valor límite.

En los Estados Unidos, como en todas partes, ha habido una gran diversidad de experiencias. Charles Davies de West Point, y después del Columbia College, deja a la variable alcanzar su límite en su *Calculus* de 1836. Levi W. Meech, C.H. Judson, De Volson Wood y Simon Newcomb llevaron a cabo una discusión sobre este tema.[17] El artículo de Wood expresa el punto de vista de que al prohibir que la variable alcance su límite «se restringe innecesariamente la ley de aproximación de la variable», aunque la variable puede estar «sujeta a una ley tal que para la mente humana parezca imposible que alcance el límite». En la *Philosophv of Mathematics* de A. T. Bledsoe, Filadelfia, 1886, se encuentra una discusión elaborada sobre el tema. Bledsoe sostiene (p. 44) que la variable en realidad nunca alcanza su límite y

> "...éste, entiendo, será el caso en relación con toda variable realmente usada en el método infinitesimal. Cuando las variables sean producidas a partir del cálculo y se vea que alcanzan su límite sin violar la ley de su incremento o decremento, será el momento de apartarse de la definición de Duhamel».

El hecho de que un profesor como Bledsoe, que había estudiado durante tanto tiempo sobre los fundamentos del cálculo, no pudiera pensar en ejemplos de variables alcanzando sus límites, es un indicador de que la aplicación del cálculo a la física y a la mecánica no recibía entonces la cuidadosa atención que merecía.

Con la teoría de límites pasó lo mismo que con los números negativos e imaginarios. En el siglo dieciocho se sentía que el que esos números pudieran existir en álgebra era asunto de argumento y demostración; ahora es simplemente cuestión de suposición. Lo mismo vale para las variables que alcanzan sus límites. En la teoría moderna no es particularmente cuestión de argumento, sino de suposición. la variable alcanza su límite si deseamos que lo haga; no alcanza su límite si deseamos que no lo haga. Nuestro «desear» una cosa o la otra consiste en suponer un continuo en el cual el límite es un valor que puede asumir la variable; nuestro «no desear» consiste en no suponer el valor del límite en el conjunto de valores que la variable puede tomar.

NOTAS:

1. Newton, *Principia,* Libro I, Sección I, último escolio.
2. Newton, *Principia,* Libro I, Sección I, Lema I.
3. A.C. Fraser, *The works of George Berkeley,* D.D., Vol. II, Oxford, 1871, p. 501, también Vol. III, pp. 76, 91.
4. Berkeley, "Principies of Human Knowledge", *The works of George Berkeley,* Vol. I, pp. 220, 223-225.

5. G.A. Gibson, Review of Cantor's "Geschichte der Mathematik", Vol.3, en *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society,* Vol. XVII, 1898-99. El artículo de Gibson da la reseña más completa de la controversia del *Analyst con* la que estamos familiarizados.

6. A. Collier, *Clavis Universalis,* editado por Ethel Bowman, Chicago, 1909, pp. 80-82.

7. D. Hume, *Essays Moral, Political, and Literary,* Londres, 1808, editado por T. H. Green y T. II. Grose, Vol. II, p.129.

8 William Whewell, *Doctrine of Limits*, Cambridge, 1838, p. 18. Ver también p.23.

9. Artículo «Límite» en la *Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences* (Diderot).

*«sobrepasar la magnitud a la que se aproxima».

10. Citado por Bledsoe, y por Carnot en sus *Reflexions sur Ia métaphvsique du calcul infinitesimal,* 5. ed., París, 1881, p. 147.

11. Carnot, *op. cit.,* p. 168.

12. A. L. Cauchy, *Cours d'analyse,* 1821, p. 4.

13. Philip. E. B. Jourdain, «The Development of the Theory of Transfinite Number», *Archiv der Mathematik u. Physik,* Bd. 14, 1909, p. 297. El trabajo de Jourdain aparece en Bd. l0, 1906, pp. 254-281; Bd. 14, 1909, pp. 289-316; Bd.16,1910, pp. 21- 43; Bd. 22, 1913.

14. *Eléments de calcul infinitesimal,* Duhamel, Vol. I, Libro I, Cap.1.

15. G. S. Klügel, Mathematisches Wörterbuch, Leipzig, 1805, Vol. II, Art. «Grenze».

16. *Allgem, Encyklopädie der Wissensch, u. Künste* (Brockhaus), 90. Theil.

17. *The Analyst* (J. E. Hendricks, Des Moines, Iowa), Vol. I, 1874, p.133 et seq.; Vol. VIII, 1881, p. 105 et seq.; Vol. IX, 1882, p. 79 et seq.; Vol. IX, 1882, p. 114 et seq.

VII

7. Kant y otras discusiones antes de Cantor

Llegamos ahora a una importantísima figura en el pensamiento filosófico —Emmanuel Kant. Este tomó a la dialéctica de Zenón con más seriedad de la que se había acostumbrado anteriormente. Kant dice que los críticos acusaron a Zenón de una completa negación de dos proposiciones que se contradicen a sí mismas. Dice Kant, «Pero no creo que él sea correctamente acusado de esto».[1] Zenón no era tan escéptico como lo han considerado. Kant no escribió nada sobre los argumentos de Zenón sobre el movimiento, pero sí sobre otros de sus argumentos. La primera antinomia de Kant, o «el primer conflicto de las ideas trascendentales», contiene partes que nos recuerdan la siguiente aniquilación de la noción de espacio, como la dio Zenón: Si existe el espacio, está en algo, porque todo lo que es, está en algo; pero aquello que está en algo, también está en el espacio. Entonces el espacio también debe estar en el espacio, y así infinitamente: por lo tanto no hay espacio. Aunque Kant no contribuyó directamente a la comprensión más clara de los argumentos de Zenón sobre el movimiento, su obra tuvo el efecto de que el examen posterior sobre el tema fuera más cuidadoso y esmerado.

En 1794 apareció en Halle una monografía de los argumentos de Zenón sobre el movimiento hecha por C.H.E. Lohse, la cual está empapada por la atmósfera de la filosofía kantiana. Es la primera publicación sobre nuestro tema que apareció en forma de monografía.[2] De sus cuatro partes, la primera trata del sistema de Zenón en general, la segunda da sus argumentos contra el movimiento, la tercera explica la refutación de los argumentos de Zenón por Aristóteles, la cuarta trata de la «única» manera de refutar a Zenón. No menciona para nada al último argumento, el «estadio». Declara arbitraria a la distinción de Aristóteles entre una división potencial y actual hasta el infinito. Lo que se puede dividir hasta el infinito, dice Lohse, realmente consiste de un número infinito de partes que existen aun antes de la división. En este punto se pone a favor de Zenón contra Aristóteles, como lo hizo Bayle, aunque Lohse no lo menciona. Lohse dice que el error fundamental de Zenón está en una concepción equivocada del tiempo y el espacio. Estas no son cualidades sujetas a nuestros sentidos, sino formas que determinan la manera en la cual nuestros sentidos son afectados; son ideas *a priori*. Tanto el espacio como el tiempo pueden ser divididos hasta el infinito, pero no podemos considerar al tiempo como hecho de puntos indivisibles a la manera de Zenón, de otro modo, lo que sucede en un momento del tiempo sucedería en ningún tiempo. El reposo no es, como Zenón y sus discípulos dicen, la ausencia de movimiento; es la menor velocidad de una sucesión. Un cuerpo puede ser percibido solamente cuando se mueve. Lohse dice «sin duda, todos los errores de su sistema brotaron de ese error. Por lo tanto se llegó a que parecían contradecirse mutuamente la razón y los sentidos».

Joh. Christoph Hoffbauer (1766-1827). quien presidía cuando Lohse presentó su disertación para un grado académico en Halle, muchos años después, preparó un artículo en una enciclopedia, «Achilles (Der Trugschluss)».[3] Después de expresar su desaprobación del argumento de Facciolati (al que nos referimos previamente) declara que el argumento de Zenón es verdadero solamente con una condición que no se ha establecido explícitamente: La afirmación de que el corredor más rápido siempre llegará solamente a los lugares a donde ha estado el más lento y estará atrás del corredor más lento, es verdadera solamente con la condición de que el más rápido no haya alcanzado al más lento. ¡Lo único probado por Zenón es, por tanto, que el corredor más rápido no puede haber alcanzado al más lento en tanto el más lento siga a la delantera!

Christian Ludwig Gerling. profesor de matemáticas, astronomía y física en la Universidad de Marburg, en una disertación prorectorado[4] dio una respuesta al argumento de Hoffbauer. La pretensión de que el argumento de Zenón es válido sólo en ciertos puntos, no en todos, no es objeción en absoluto, a menos que se demuestre primero que es un error asegurar como verdadero para todos los puntos lo que de hecho es verdadero para un número infinito de puntos; un defensor de Zenón siempre puede exigir que se le muestren los puntos en los cuales la prueba no se cumple. Gerling insiste en que el mismo Hoffbauer razona en círculo cuando acusa a Zenón de razonar en un círculo, porque a quien todavía tiene que probar la posibilidad de un alcance, no se le permite hablar del tiempo anterior o posterior de que tenga lugar el alcance.

En contra del argumento de Waldin, lanzado desde esa misma universidad (Marburg) cuarenta y tres años antes, en el sentido de que Zenón supone la existencia del movimiento, que es exactamente lo que está en discusión, Gerling responde que el argumento de Zenón es indirecto, de *reductio ad absurdum,* cuya forma es válida.

Gerling declara inútil e innecesario el aparato metafísico de Lohse. En la parte constructiva de su disertación Gerling se extiende al referirse a la distinción entre cantidad continua y discreta, admite la divisibilidad infinita del espacio y el tiempo, y construye las progresiones geométricas infinitas cuyas sumas dan respectivamente la distancia y el tiempo de correr antes de que Aquiles alcance a la tortuga. Aquí Gerling repite lo que hizo mucho tiempo antes Gregoire St. Vincent, nada más que Gerling usa letras, mientras que Gregoire supuso un caso numérico especial. Gerling no menciona para nada a Gregoire. Las sumas de las dos progresiones geométricas son valores que de ningún modo entran en conflicto con la estimación obtenida de la percepción sensorial; la paradoja de Zenón, interpretada con la ayuda de fórmulas matemáticas, no entra en conflicto con la experiencia. Por lo tanto la paradoja está resuelta. Aunque

Gerling es matemático no siente la necesidad de explicar la posibilidad de que una variable alcance su límite.

Con respecto a la "flecha", basta con dar una definición precisa de continuo y discreto. En una cantidad continua el número de subdivisiones posibles es *arbitrario*, y cada subdivisión es continua en sí misma. Por lo tanto no vale la negación de la divisibilidad infinita de Zenón. Gerling trata al "estadio" con más respeto de lo acostumbrado, y admite que, si se supone con Zenón que el espacio y el tiempo no son infinitamente divisibles, entonces se infiere, como dice Zenón, que la mitad del tiempo es igual al tiempo total.

George Wilhelm Fiedrich Hegel da una discusión enteramente diferente, más del estilo de Kant, profunda y oscura. Sostiene el punto de vista de que «la dialéctica de la materia de Zenón no ha sido refutada hasta este día; aún ahora no nos hemos ocupado de ella, y se ha dejado a la materia en la incertidumbre».[5] Defiende a Aristóteles contra Bayle, quien objetaba la distinción de Aristóteles entre la división potencial o actual hasta el infinito de una línea. Hegel se da cuenta, perspicazmente, de la importancia especulativa de las paradojas de Zenón y hace resaltar que el dialéctico de Elea había analizado nuestros conceptos de tiempo y espacio y había señalado las contradicciones que contienen: «Las antinomías de Kant no hacen más de lo que Zenón hizo aquí».[6] El movimiento aparece «en su distinción de auto identidad pura y negatividad pura, el punto como distinguido de la continuidad».[7] Esta continuidad es una cohesión absoluta, una aniquilación de todas las diferencias, de ser por sí misma; el punto, por otro lado, es existencia pura en sí, la distinción absoluta de los demás, la suspensión de toda autoidentidad y de toda la cohesión. En el tiempo y el espacio los opuestos se unen en uno, de allí la contradicción que se exhibe en el movimiento. De la posición de Hegel todavía falta mucho para llegar al continuo de Georg Cantor, con su hábil unión de lo continuo y lo discreto. Hegel dice que la suposición en la «dicotomía» de la mitad del espacio es incorrecta, «no hay mitad del espacio porque el espacio es continuo; puede partirse a la mitad un pedazo de madera, pero no el espacio, y el espacio sólo existe en movimiento".[8] El movimiento es conexión, su opuesto es la desintegración en un número indefinido de agregados.

Las ideas de su opositor filosófico Johann Friedrich Herbart son un poco más específicas y comprensibles. En dos trabajos considera a las paradojas de Zenón, en su popular *Einleitung in die Philosophie* (1813) y en *Alleeine Metapysik* (1828-9) más científica y técnica. Sólo en la segunda obra intenta solucionar las contradicciones. De aquí citamos:[9]

> «El argumento inevitablemente confunde a aquellos quienes admiten la divisibilidad infinita del camino y luego se consuelan con una divisibilidad infinita del tiempo, a tal grado que aunque al principio desean considerar el proceso de dividir, el cual debe continuar hasta el infinito, de repente de un salto

pasan por alto al número infinito de intervalos de tiempo, ya que ven que deben combinar el número infinito de partes tanto del tiempo como del camino al lugar del alcance, lo cual no pueden hacer. El salto y la división doblemente infinita son erróneas y no llevan a nada».

Así es que Hebart rechaza esta subdivisión infinita del tiempo y el espacio, porque la mente no puede *imaginar* todos los pasos en el proceso. Se hace a la imaginabilidad el criterio de verdad o error. Este criterio excluye lo infinito de una vez por todas; excluye a la geometría no euclideana y a otras partes de las matemáticas.

No podemos imaginar realmente cosas que nunca hemos visto. Nuestros sentidos son imprecisos, nuestras intuiciones son burdas, por lo tanto nos parecería imposible construir teoría matemática profunda, si todo lo inimaginable fuera desechado. Herbart trata de explicar el movimiento por el concepto de *velocidad,* la cual parece contener una contradicción, que Herbart intenta resolver con su teoría de una «línea rígida», una especie de continuo, el cual pudiera tener grandes posibilidades con un desarrollo más cuidadoso. Tal como está ofrece obstáculos mucho mayores de lo que pretende explicar sobre la "dicotomía" o el "Aquiles" originales.

Friedrich Adolf Trendelenburg de la Universidad de Berlín, toma una actitud todavía diferente hacía las paradojas de Zenón. En su *Logische Untersuchungen*, 1840, construye su sistema filosófico sobre el concepto de movimiento. El movimiento constructivo es común al mundo externo del ser y al mundo interno del pensamiento, así que el pensamiento, como contraparte del movimiento externo, produce a partir de él mismo: espacio, tiempo y las categorías. El movimiento es indefinible. De acuerdo con este punto de vista los argumentos de Zenón contra el movimiento han llegado a existir solamente a través del movimiento. Porque dependen de la división del tiempo y del espacio, y de la síntesis de esas divisiones. Pero la división y la síntesis no son más que formas especiales de movimiento. Lo que combaten las pruebas lo usan ellos mismos como medios de combate y de este modo testifican lanaturaleza controladora del movimiento. Trahdelenburg y Kant evidentemente parten de extremos opuestos; Kant toma al tiempo y al espacio como ideas *a priori,* y al movimiento como secundario y dependiente de ellos; Trendelenburg hace del movimiento la idea *a priori* y pretende derivar de él al tiempo y al espacio.

Friederich Ueberweg, de la Universidad de Könisberg,[10] se refiere a nuestro tema en diferentes partes de su *Logik.* Dice en una parte que el «Aquiles» casi no prueba nada; sólo prueba que la tortuga no puede ser alcanzada dentro de una serie definida, y entonces declara que la tortuga no puede ser alcanzada en ninguna parte y en ningún tiempo. Esta crítica con todo y lo verdadera que pudiera ser, no aclara el tema lo suficiente como para satisfacer al lector.

La crítica de Carl Prantl,[11] profesor de la Universidad de Munich, es del mismo tipo pero más completa. Dice que Zenón descartó el concepto de continuidad considerando solamente algunos momentos particulares en el tiempo. Al derivar sus inferencias a partir de estos fragmentos desintegrados del tiempo y del espacio, Zenón pudo presentar las contradicciones de una manera pintoresca. Dice Prantl que aquellos a quienes les importa más la forma retórica que la filosofía verdadera, frecuentemente hacen esta conversión de lo genera1 y continuo en lo particular y momentáneo.

Eugen Carl Dühring en su *Kritische Geschichte der Philosophie*, primera edición, 1869, muestra mucha confianza en su capacidad para aclarar el misterio de las paradojas de Zenón. Aquí son necesarios tres conceptos: reposo, movimiento *y* posición. Generalmente sólo se toma en cuenta a los dos primeros. En cada momento (punto) de tiempo un cuerpo en movimiento tiene una posición definida pero no movimiento. Este hecho dificulta explicar el movimiento. Además dice:[12] «La fuerza impulsora y la resolución real de los argumentos eleáticos se debe encontrar principal y casi exclusivamente en la necesidad lógica que no permite que el infinito sea pensado como completo, por así decirlo, ennumerado y concluido. ... Es el concepto de infinito el que se muestra él mismo, en todas partes y también en donde no es fácilmente reconocible, como la verdadera causa de las contradicciones». Dühring trata sobre el infinito en varias partes de sus trabajos. Cree en el infinito generalmente explicado en el estudio del cálculo, —una variable que se incrementa sin límite, pero en todo momento tiene en realidad un valor finito. Le hace la guerra al concepto de infinito actual — «jene wüste sich wideroprechende Unendlichkeit». «La divisibilidad infinita indica ... solamente esto, que yo puedo concebir la división de una cantidad tanto como yo quiera, sin límite. Si, por otro lado, considero que la división hasta el infinito existe fuera de la presentación que hago de ella, entonces inmediatamente resultan las contradicciones más variadas... Con respecto al movimiento, debe admitirse que pertenece a los conceptos empíricos, i.e., en nuestro pensamiento siempre queda allí un residuo irreconocible ya que debemos renunciar al intento de penetrar en las razones de los fenómenos». George Cantor critica a Dühring con estas palabras:

> «Las pruebas de Dühring contra lo propiamente-infinito podrían darse en muchas menos palabras y me parece que se resumen en esto, o que un número finito definido, por muy grande que pueda pensarse que sea, nunca puede ser un número infinito, como se infiere inmediatamente a partir del concepto de número finito, o que no puede pensarse en la variable, un número finito ilimitadamente grande, con la cualidad de precisión y por lo tanto tampoco con la cualidad de existencia, como se infiere otra vez de la naturaleza de la variabilidad. Estoy seguro de que por esto de ninguna manera queda refutada la concebibilidad del número transfinito; y sin embargo, estas pruebas se toman como pruebas contra la realidad de los números transfinitos. Este modo de argumentación me parece igual que si, a partir de la existencia de innumerables tonos de verde, tuviéramos que concluir que no puede haber rojo.»[13]

Eduard Wellmann, en su monografía histórica de 1870, [14] acepta la explicación de Dühring sobre el infinito y sobre Zenón. Johann lIeinrich Loewe, discípulo del filósofo Anton Günther de Viena, publicó en 1867 otra investigación, en parte histórica y en parte explicativa. Knauer [15] se refiere a ella como a explicación más precisa y satisfactoria dada hasta entonces. Loewe[16] dice: «La solución del acertijo nos parece que está en saber que inevitablemente deben surgir contradicciones tan pronto como el espacio, el tiempo y el movimiento se consideran a partir de la presentación sensorial y del razonamiento conceptual no sensorial al mismo tiempo.» Un punto de vista apela a la imaginación, el otro al pensamiento abstracto. La percepción sensorial sólo puede seguir el proceso de división infinita durante un tramo pequeño, todo lo demás es asunto del razonamiento puro. La presentación del «Aquiles» hecha por Gerling es una apelación a la razón. En tanto uno considera la multiplicidad infinita de distancias pequeñas y de intervalos de tiempo, uno aborda los acertijos desde el punto de vista del pensamiento abstracto; cuando uno apela a la imaginación, entonces sobresalen el tiempo finito y la longitud finita de la carrera. Parece que Loewe todavía mantiene el viejo punto de vista de que el pensamiento no puede reconocer ningún fin de un movimiento que se extiende sobre un proceso infinito. Por lo tanto la contradicción debe mantenerse, la antinomía es evidente.

De este modo vemos que la filosofía alemana hasta el último cuarto del siglo XIX continuamente acentúa la existencia de contradicciones en el problema del movimiento.

Algunos pensadores ingleses del siglo diecinueve, que estaban interesados en los argumentos de Zenón, se dejaron llevar por la influencia de la filosofía kantiana. La actitud kantiana hacía Zenón está descrita en el artículo «Zenón» en la octava edición de la *Encyclopaedia Britannica* (1860) así:

> «Puso mucho empeño en su tarea, y curiosamente, los pensadores posteriores coincidieron en general en malinterpretar tanto su razonamiento como su método y es sólo en los últimos años que Kant, en su *Crítica de la razón pura* (ver Kritica der Reinen Vernunft) captó las calumniadas doctrinas del eléata y las presentó a la admiración de todos los verdaderos pensadores como ejemplos raros de pensamiento agudo y justo. Bayle, en un inteligente artículo sobre Zenón, en su *Dictionnaire,* lo considera, de acuerdo con la costumbre, un escéptico. Brucker nota que Zenón sobrepasa su inteligencia, y se contenta con hacerlo panteísta. Otros además lo acusan de nihilismo. Afortunadamente Zenón puede permitirse permanecer muy tranquilo ante todas las afrentas a su razón... todos ellos [argumentos contra el movimiento] surgen, como Kant y Hamilton *(Lectures on Metaphysics)* han demostrado, de la incapacidad de la mente para concebir la indivisibilidad última o la divisibilidad sin fin, del espacio y el tiempo, como extensos y como cantidades protensas. La posibilidad del movimiento, no obstante cierta como un hecho observado, se muestra así como inconcebible. El haber descubierto esta peculiaridad de nuestra constitución mental, y el haberlo expresado con eminente claridad, se debe a Zenón el eléata, y sólo a él.»

Sir William Hamilton expone así el tema: [17]

> "El tiempo es una cantidad protensa, y, en consecuencia, cualquiera de sus partes, por muy pequeña, no puede, sin contradicción, ser imaginada como no divisible en partes y estas partes en otras *ad infinitum.* Pero la alternativa contraria es igualmente imposible; no podemos pensar esta división infinita. Una es necesariamente cierta, pero ninguna de las dos puede concebirse como posible. Es en esta incapacidad de la mente para concebir ya sea la indivisibilidad última o la divisibilidad sin fin del espacio y del tiempo, donde se fundamentan los argumentos del eléata Zenón contra la posibilidad del movimiento, —argumentos que al menos muestran que el movimiento, aunque cierto como un hecho, no puede concebirse como posible, porque contiene una contradicción... Ahora, a la ley de la mente, de que lo concebible está en toda relación rodeada por lo inconcebible, le llamo Ley de lo condicionado."

John Stuart MilI, en su *Logic*,[18] se refiere a Thomas Brown, quien consideró al «Aquiles» irresoluble, y después ofrece una solución cuya invención no reivindica. Esta no presenta nuevos puntos de vista. Hierbert Spencer discute cuestiones sobre el tiempo y el espacio en sus*First Principles*[19] y concluye en general que «las ideas científicas últimas, entonces, son todas representativas de realidades que no pueden ser comprendidas.» En particular, «aunque se divide la tasa de movimiento a la mitad y otra vez a la mitad, eternamente, todavía existe movimiento; y el movimiento más pequeño está separado del no movimiento por un abismo impasable.»

Inmediatamente se ve que los filósofos del siglo XIX habían penetrado con más profundidad que la mayoría de sus predecesores y habían encontrado dificultades despreciadas anteriormente por Hobbes y otros que parecían pensar que habían resuelto las paradojas con sólo declarar que el tiempo, así como el espacio, era infinitamente divisible. Desde el tiempo de Kant se dieron cuenta cabalmente de la imposibilidad de *imaginar* el «Aquiles» a partir del punto de vista de la divisibilidad infinita de una distancia, y que todos los llamamientos a la razón eran vanos... Cuando Spencer dice que la divisibilidad infinita no puede ser «comprendida», y Thomas Brown y Sir William Hamilton dicen que el movimiento es «irresoluble» e «inconcebible,» yo lo tomo como que quieren decir simplemente que estos procesos son*inimaginables*, que están más allá del alcance de nuestras intuiciones sensoriales. No interpreto como que quieren decir que estos procesos están más allá de la lógica, más allá del alcance de la facultad de razonamiento como para que sean y permanezcan para siempre, completamente misteriosos. Las matemáticas incluyen entre sus resultados numerosas enseñanzas que uno no puede «imaginar». Probablemente nadie declara ser verdaderamente capaz de formarse una imagen visual de las geometrías no euclideanas; los analistas no declaran ser capaces de imaginar o ver una curva continua que no tenga tangente en ninguno de sus puntos, no obstante ningún matemático moderno rechaza a las geometrías no euclideanas ya las curvas continuas no diferenciables.

Estas creaciones matemáticas inimaginables son admitidas dentro de la ciencia por necesidad. Félix Klein se refiere al tema como sigue: «Ya que no es posible comprender con exactitud los temas de la geometría abstracta por medio de la intuición espacial, uno no puede basar una prueba rigurosa en la geometría abstracta solamente en la intuición, sino que debe recurrir a una deducción lógica a partir de axiomas que se supone que son exactos».[20]

Y he aquí que los dos famosos ingleses consumidores de opio Thomas De Quincey y Samuel Taylor Coleridge se interesaron en el «Aquiles». De Quincey se refiere a los poderes críticos de Coleridge en los siguientes términos: [21]

> «Le había hecho notar que el llamado sofisma, que debería llamarse dificultad, de Aquiles y la tortuga, el cual ha intrigado a todos los sabios griegos, era, de hecho, solamente otra forma de la confusión que acompaña a las fracciones decimales; que por ejemplo, si conviertes 2/3 en su forma decimal, nunca va a terminar, sino que es .666666, etc., a *d infinitum.* 'Si', respondió Coleridge, 'el absurdo aparente de los problemas griegos surge de este modo, porque se supone la divisibilidad infinita del espacio pero se pierde de vista la infinidad del tiempo correspondiente.' Hubo un destello de luz que iluminó una oscuridad que había existido durante 23 siglos."

De hecho Aristóteles ya había llegado a eso. Pero Coleridge avanzó un poco más en un ensayo sobre sofistas griegos en *The Friend*,[22] donde dice:

> «Los pocos restos de Zenón el eléata, sus paradojas contra la realidad del movimiento, son sólo proposiciones idénticas girando dentro de una clase de acertijos caprichosos, como la celebrada paradoja titulada Aquiles y la Tortuga, cuya completa plausibilidad se apoya en el truco de suponer un *mínimo* de tiempo, mientras que no se admite un *mínimo* al espacio, aunado con eso de exigir de la *intelligibilia* ? ? ? ? ? ? ? , las condiciones peculiares a los objetos de los sentidos ? ? ?? ? ? ? ? ? ó ? ?? ? ? ? ? ? ??? .

Lo que concierne a Coleridge en este pasaje es el argumento de que el sofisma consiste en aplicar a una idea condiciones que sólo se aplican apropiadamente a los *phaenomena.* El argumento de Coleridge fue elaborado en forma de diálogo, muchos años después, por Sadworth H. Hodgson. Damos la parte crítica de la discusión:[23]

> «... ser infinitamente *divisible* no es la misma cosa que ser infinitamente *dividido.* En realidad dividir hasta el infinito esa centésima parte de un minuto, en que (*fenomenalmente,* como dices) Aquiles alcanza a la tortuga, es una operación infinitamente larga... Y exiges a Aquiles que lleve a cabo *esta* división, antes de que la tortuga pueda ser alcanzada, y que la realice *fenomenalmente* ... Pides que Aquiles muestre a los sentidos la divisibilidad infinita del tiempo y del espacio, lo cual les atañe a ellos,

sin ninguna duda, pero solamente como objetos de la imaginación y el pensamiento... El mundo del *pensamiento* y de *la realidad* no es un mundo aparte, sino que es idéntico al mundo fenomenal, solamente que es tratado de diferente manera... Tampoco hay contradicciones entre ellos. El movimiento fenomenal es tan infinitamente divisible en el *pensamiento* como lo son el tiempo y el espacio.»

Esta explicación no explica nada. Aun como «objetos de la imaginación» la divisibilidad infinita del tiempo y del espacio es una fuente de confusión. Nuestra imaginación es incapaz de seguir a Aquiles hasta el final, a través de los infinitos de los intervalos de tiempo y espacio. Más aún, *"pensamiento* y *realidad"* sin duda son mundos «aparte», siempre que los intervalos de tiempo, correspondientes a los intervalos de espacio recorridos por Aquiles, se tomen de tal manera que formen juntos una serie infinita que sea *divergente*, de modo que, en el pensamiento, Aquiles nunca alcanza a la tortuga; en el argumento tradicional de Zenón, «pensamiento y realidad» estaban "aparte".

NOTAS:

1. *Kant's Werke,* Bd. III, "Kritik der reinen Vernunft", 2. Aufl. (1787), Berlin, 1904, p. 345.
2. Car. Henr. Erdul. Lohse, *Diss. (pracside Hoffbauer) de argumentis, quibus Zeno Eleates nullum esse motum demonstravit et de unica horum refutandorum ratione*. Halle, 1794. Toda nuestra información sobre el artículo de Lohse se tomó de E. Wellman *op. cit.,* pp. 12-14.
3. *Allg. Encycl. d. Wissensch. u. Kunste,* von J.S. Ersch u J. G. Gruber, Leipzig, 1818.
4. *De Zenonis Eleatici paralogismis wotum spectantibus, Dissertatio auctore Chr. Lud. Gerling,* Marburg, 1825. Conocemos esta disertación solamente por la descripción dada por E. Wellman *op. cit.,* pp. 14,15, y por Dr. Johann Heinrich Loewe, «Ueber dic Zenonschen Einwurfe gegen die Bewegung», en *Böhm Gesellsch. d. Wissensch.,* VI Folge, 1 Bd., 1867, pp. 30,34. En el *Handwörterbuch* de Poggendorff, se da el año de 1830 como la fecha de la disertación de Gerling. Hemos visto referencias a una edición en alemán del año de 1846. De esto inferimos que aparecieron varias ediciones de ella, y que gozaron de una circulación considerable.
5. G.W.F. Hege1, *History of Philosphy,* trad. inglesa por E. S. Haldane, Vol. I, Londres, 1892, p. 265. Veáse también *Sämtl, Werke* de Hegel, Bd. 13, 1833, pp. 314-327.
6. Hegel (ed. Haldane), Vol. I, p. 277.
7. Hegel, *op. cit..,* Vol. I, p. 268.
8. Hegel, *op. cit.,* Vol. I, p. 271.
9. J. F. Herbart, *Sämtl, Werke,* herausseg. von Karl Kehrbach, Langensalza, Vol. VIII, 1893, p. 177.

10. F. Ueberweg, *System der Logik*, 2. Aufl., p. 387 ss.

11. Carl Prantl, Geschichte der Logik im Abendlane. 1. Bd.. Leipzig. 1855, pp. 10,11.

12. *Kritische Gesch. d. Philosophie*, Dr. E. Dühring, Leipzig, l894, p. 49.

13. Georg Cantor, *Grundlagen einer allg. Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883, p. 44.

14. E. Wellwann, *op. cit.*, p. 23.

15. Vincenz Knauer, *Die Hauptprobleme der Philosophie*, Wien u. Leipzig, 1892, p. 54.

16. J. H. Loewe, *op. cit.*, p. 32.

17. *Lectures on Metaphysics and Logic*, por Sir William Hamilton, Vol.I, Boston, 1863, Lecture 318, p. 530.

18. *A System of Logic*, Vol. II, Londres, 1851, p. 381.

19. H. Spencer, *First Principles of a New System of Philosophy*, Nueva York, 1882, pp. 47-67.

20. F. Klein, *Anwendung der Differential und Integralrechrung auf Geometrie*. Leipzig, 1907, p.19.

21. *Tait's Magazine*, Sept. 1834, p. 514.

22. *Complete Works of S.T. Coleridge*, Vol. II, Nueva York, 1856, p. 399.

23. *Mind*, Londres, Vol. V, 1880, pp. 386-388.

VIII

8. Expuestos a la luz de un continuo idealista

La explicación completa de las paradojas de Zenón requiere de dos ideas que son muy familiares a los matemáticos modernos, a saber, la aceptación de la existencia de conjuntos realmente infinitos y la idea de un continuo conectado y perfecto. El primer concepto, el del infinito actual, contrapuesto al infinito potencial, ha estado en estudio desde el tiempo de Aristóteles. Hombres como San Agustín, Galileo, Pascal, Volder. Schultze, parecían haber tenido una concepción de él más o menos no contradictoria. Otros lo negaban. Entre los últimos estaban tanto filósofos como matemáticos; la lista incluye hombres como Tomás de Aquino, Gerdil, Descartes, Spinoza, Leibniz, Lock, Lotze, Renouvier, Moigno, Cauchy, Gauss, y desde luego muchos otros.[1] Galileo poseyó una maravillosa percepción de la naturaleza interior del problemas. Por ejemplo, mostró que había tantos enteros que eran cuadrados perfectos como había enteros en total. Curiosamente, el argumento de Galileo fue malinterpretado por algunos escritores recientes. En vez de aceptar la conclusión como legítima para esa clase de infinito, como fue aceptada por Galileo, estos escritores la declararon absurda, y por lo tanto, a la hipótesis del infinito actual, un mito. Entre los hombres que tomaron este punto de vista estuvo el filósofo francés F. Pillon.[2] En 1831 (12 de julio), el gran K. F. Gauss de Gottingen escribió una carta a Schumacher en la cual se declara en contra del infinito actual en matemáticas.

En el siglo XIX se empezaron a oír con más énfasis voces a favor del infinito actual. En 1823 John Bolyai, famoso en geometría no euclideana, escribió la cualidad de un conjunto infinito: «Un conjunto infinito es uno equivalente a una parte de sí mismo.»[3] Otro pionero en este campo fue el matemático de Bohemia, Bernard Bolzano, cuyos escritos sólo en años recientes empezaron a recibir la apreciación debida.[4] Después de la aparición de los escritos de Cantor, sus ideas recibieron amplio reconocimiento entre los matemáticos, independientemente de ciertas paradojas perturbadoras que se originaron por el desarrollo más avanzado del tema. Entre los filósofos las ideas de Cantor encontraron un reconocimiento más lento. La cuestión en disputa usualmente no es tanto de lógica como de los postulados que el razonador está deseando aceptar como razonables y útiles. Un investigador que veta cualquier suposición que no apela a su intuición o a su poder de imaginación, difícilmente puede sentirse a gusto con la teoría de Cantor de los conjuntos y el continuo de Cantor. Para él las paradojas de Zenón necesariamente deben permanecer como paradojas para siempre.

La segunda noción necesaria para la completa elucidación de nuestro tema es el continuo «conectado» y «perfecto», que le debemos a Georg Cantor y a Dedekind. A estos nombres debe añadirse el de Karl

Weierstrass, quien desterró del análisis la noción mística del infinitesimal como una constante menor que cualquier número asignable, que desafía el postulado arquimediano. No estamos enterados de que alguno de estos tres hombres escribieran directamente sobre las paradojas de Zenón, pero ellos pusieron los cimientos sobre los que se apoya una teoría racional de éstas. Richard Dedekind publicó dos obras muy conocidas: *Stetigkeit und irrationale Zehlen,* Brauoschweig, 1872, y *Was sind und was sollen die Zehlen,* Brauschweig, 1888. La primera publicación importante de Georg Cantor sobre la teoría de conjuntos es su *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre,* Leipzig, 1883. Las ideas fundamentales presentadas por Dedekind y Georg Cantor son tan fácilmente accesibles y tan conocidas, que no es necesario reseñarlas aquí. Al principio los matemáticos ingleses se interesaron muy poco en los descubrimientos de Cantor. Sólo en años recientes se tomaron en cuenta en Gran Bretaña. Ernest William Hobson dio una inusitadamente interesante descripción de ellos en su discurso presidencial «On the Infinite and the Infinitesimal in Mathematical Analysis», ante la London Mathematical Society, en 1902. [5] Citamos lo siguiente:

> "Cuando se concibió que estas meras potencialidades se convierten en actualidades, que existen números o magnitudes *fijas* las cuales son infinitas o infinitesimales, que el mero infinitamente grande se vuelve infinito actual, o que el meramente indefinidamente pequeño se hace un infinitesimal actual, se llegó a la región de la controversia seria...
>
> «Aquí tenemos el origen del método de límites, en sus formas geométrica y aritmética, y aquí cruzamos por la dificultad central del modo en el cual se consideraba a un límite como realmente alcanzado. Un límite que aparecía sólo como el final inalcanzable de un proceso de regresión indefinida, y al cual se le hacía una aproximación sin fin, por algún proceso inaccesible a la imaginación sensorial, tenía que ser considerado como realmente alcanzado, el hueco que separaba al límite de las magnitudes de aproximación tenía que ser brincado de alguna forma misteriosa...
>
> «La noción de número, entero o fraccionario, se ha establecido sobre una base completamente independiente de la magnitud mensurable, y el análisis puro se considera un esquema que trata solamente al número, y no tiene que ver *per se* con la cantidad mensurable. El análisis así puesto sobre una base aritmética se *caracteriza por el rechazo de todas las apelaciones a nuestras intuiciones especiales del espacio, tiempo y movimiento para apoyar la posibilidad de sus operaciones* ...
>
> «Por medio de esta concepción del dominio del número se voltea la dificultad radical del análisis antiguo, en lo que toca a la existencia del límite, estando cada número del continuo definido actualmente de una manera tal que en sí mismo exhibe el límite de ciertas clases de sucesiones convergentes... Debe observarse que el criterio de convergencia de un conjunto es de carácter tal que no se hace uso en él de los infinitesimales; y en la prueba se usan números definidos finitos solos ...

«Esta [antigua] noción intuitiva del continuo parece contener la noción de divisibilidad ilimitada, los hechos de que, por ejemplo, en el continuo lineal podemos encontrar dentro de cualquier intervalo PQ uno más pequeño P'Q'; que este proceso puede continuarse tanto como los límites de nuestra percepción lo permitan; y que no somos capaces de concebir que aún más allá de los límites de nuestra percepción el proceso de divisibilidad en el pensamiento pueda llegar a un final. Sin embargo, las discusiones modernas en lo tocante a la naturaleza del continuo aritmético han puesto en claro que esta propiedad de divisibilidad ilimitada, o conexidad, es solamente una de las características notorias del continuo, y es insuficiente para distinguirlo de otros dominios que tienen la misma propiedad. El conjunto de números racionales, o puntos en una recta correspondientes a esos números, poseen esta propiedad de conexidad en común con el continuo, y no obstante no es continuo...

«La otra propiedad del conjunto que es característica del continuo, es la de ser, en el lenguaje técnico de la teoría de conjuntos (Mengenlehre) perfecto: el significado de esto es que todos los límites de las sucesiones convergentes de números o partes que pertenecen al conjunto, pertenecen ellas mismas al conjunto; e, inversamente, que puede mostrarse que todo número o punto del conjunto es el límite de una de tales sucesiones ...

«... la última propiedad del continuo, la cual no fue dada a conocer por aquellos que tomaron al continuo intuitivo como una base suficiente, es en algunos aspectos la propiedad más absolutamente esencial para el dominio de una función que debe ser sometida a la operación del cálculo.

«Para mostrar la manera en la cual los números ordinales transfinitos son requeridos cuando tratamos con conjuntos de no-finitos, yo propongo recurrir a la conocidísima paradoja de Aquiles y la tortuga... Indiquemos las posiciones sucesivas referidas de Aquiles por medio de los números ordinales 1, 2, 3,... puestos como subíndices en la letra A, de manera que $A_1 A_2 A_3$ representan las posiciones de Aquiles... Estos puntos $A_1 A_2 A_3$ tienen un punto 1ímite

$$\begin{array}{cccccccc} B_2 & B_3 & B_4 & & & & & \\ \hline A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_w & A_{w?1} & A_{w?2} & A_{w2} \end{array}$$

el cual representa el lugar donde Aquiles en realidad alcanza a la tortuga. El punto límite no está contenido en los conjuntos de puntos $A_1 A_2 A_3$; si deseamos representarlo tenemos que introducir un nuevo símbolo w, y denotar el punto por este número. No aparece en la serie 1, 2, 3,... pero está precedido por todos estos números, y no obstante no hay un número precediéndolo inmediatamente; es el primero de una nueva serie de números.»

Hobson procede a demostrar cómo un número finito puede mantenerse a sí mismo en comparación con un número ordinal transfinito,* mostrando que $w = 1 + w$, pero $w + 1 > w$; se ve que falla la ley conmutativa en la suma. Revela la necesidad de introducir los números transfinitos para la representación del límite que no está contenido dentro de la región del proceso convergente. La exposición de Hobson representa una explicación que ofrecen los descubrimientos recientes de las matemáticas sobre la «dicotomía» y el «Aquiles». Indudablemente algunos lectores podrían haber deseado una exposición más completa de los detalles. Se notará que el elemento tiempo no fue considerado en absoluto por Hobson. Las teorías de Dedekind y Cantor sobre el continuo no incluyen al elemento del tiempo. ¿Pero cómo es posible ignorar al tiempo en cuestiones que tratan sobre el movimiento? En primer lugar Cantor[6] señala que el continuo es un concepto mucho más primitivo y general que el concepto de tiempo, que se necesita la teoría del continuo para dar una explicación clara del tiempo o de cualquier variable independiente, que el tiempo no puede ser considerado como la medida del movimiento; por el contrario, el tiempo se mide por el movimiento —los movimientos de los cuerpos celestes, los movimientos de las manecillas del reloj, el desplazamiento de la arena en un reloj de arena. En segundo lugar, no se necesita la consideración del tiempo en el punto crítico donde está bajo consideración la capacidad de Aquiles para alcanzar a la tortuga. Supongamos que la tortuga tiene un punto de partida inicial de 10 pies y que recorre un pie por segundo, mientras que Aquiles recorre 10 pies por segundo. Formando la serie *A*, cuyos términos representan cada uno la distancia que Aquiles se mueve para llegar al lugar donde estaba la tortuga, al comienzo del intervalo de tiempo en consideración, y haciendo que la serie *T* represente estos intervalos de tiempo, tenemos

$$A \qquad 10 \;?\; 1 \;?\; \frac{1}{10} \;?\; \frac{1}{100} \;?\; \frac{1}{1000} \;? \quad ,$$

$$T \qquad 1 \;?\; \frac{1}{10} \;?\; \frac{1}{100} \;?\; \frac{1}{1000} \;?\; \frac{1}{10000} \;?$$

Ambas series geométricas infinitas son convergentes; la suma de los términos de cada una de estas series se acerca a un número finito como límite. Ahora viene la delicada cuestión siempre presente de si la suma realmente *alcanza* su límite. Debe observarse que esta cuestión aparece en cada serie, que una serie no ayuda a la otra. Si la suma de *A* alcanza su límite, también lo hace la suma de *T*. pero la posibilidad de que la suma de *A* alcance su límite es una consideración independiente de *T*. En este sentido la consideración del tiempo no entra en la parte crítica de la explicación del «Aquiles». Que la suma de *A* alcance su límite o no es un problema de pura suposición de nuestra parte. Si se supone que el valor límite de $11\frac{1}{9}$ pies está incluido en el conjunto de números que la variable-distancia pueda tomar, entonces desde luego que la variable alcanza su límite; si se supone que $11\frac{1}{9}$ pies no es un valor que la variable pueda tomar, entonces desde luego que no es alcanzado el límite. Es aquí donde debemos recibir una sugerencia de nuestras observaciones sensoriales; sabemos por nuestro conocimiento del movimiento, como nos lo proporcionan nuestros sentidos, que Aquiles, viajando con una velocidad finita uniforme en la misma dirección, en un tiempo finito alcanzará la distancia de $11\frac{1}{9}$ pies desde su punto de partida. Esta información que nos proporcionan nuestros sentidos, nos permite elegir entre dos supuestos alternativos posibles ofrecidos por la teoría (como se mencionó anteriormente), al que hace que la suma variable de *A* concuerde con los fenómenos sensoriales conocidos. Con este supuesto, la región del proceso convergente tiene un límite que está contenido en el conjunto de valores que la variable puede tomar, y, como lo explicó Hobson, el límite es *alcanzado por la variable.* Considerado desde el punto de vista de la teoría de conjuntos infinitos y de la concepción de Georg Cantor sobre el continuo, el «Aquiles» es casi una proposición autoevidente. El conocimiento sensorial sugiere que hagamos que el conjunto de valores de la distancia variable recorrida por Aquiles sea un conjunto *perfecto;* entonces la teoría nos dice que en un conjunto perfecto todo proceso convergente tiene un límite que es alcanzado.

En la *Theory of Functions of a Real Variable* (Cambridge, 1907, p. 51) de Hobson, se encuentran también interesantes observaciones sobre el continuo de Georg Cantor:

> «El término 'continuo aritmético' se usa para denotar al conjunto de los números reales, porque se sostiene que el sistema de números de este conjunto es adecuado para la representación analítica completa de lo que se conoce como una magnitud continua. La teoría del continuo aritmético ha sido criticado con base en que es un intento para encontrar el continuo dentro del dominio del número, mientras que el número es esencialmente discreto. Tal objeción presupone la existencia de alguna concepción independiente de continuo, con la cual pueda compararse la de conjunto de números reales. En el tiempo cuando fue desarrollada la teoría del continuo aritmético, la única concepción del continuo que existía era la del continuo como lo daba la intuición; pero éste, como vamos a ver, es una concepción demasiado vaga para considerarla como un objeto de pensamiento matemático exacto, hasta que su carácter como dato puramente intuitivo no haya sido modificado por definiciones y axiomas exactos.»

Se verá conforme avancemos, que frecuentemente se hace esta objeción a la que se refiere Hobson, contra el continuo de Cantor. La objeción general es que una línea no puede ser construida a partir de puntos matemáticos, externos unos a otros. Quizás esta objeción general, la cual se sugiere de manera natural desde el principio, ha desalentado a los no matemáticos para meterse en el problema de estudiar el continuo de Cantor con el cuidado necesario para su comprensión. Los filósofos que se han sujetado a tal estudio han sido ampliamente recompensados por su labor; han encontrado que este es un artefacto del entendimiento «con el cual damos unidad conceptual y una cohesión invisible a ciertos tipos de hechos fenomenales que vienen a nosotros en una forma discreta, en una variedad confusa».[7]

Otro cambio importante en el punto de vista, hecho por los creadores del continuo lineal moderno, fue el rechazo de todos los infinitesimales, esto es, de cantidades que no obedecen el postulado arquimedeano. Este postulado dice que si a y b son dos números (distintos de cero), tales que $a < b$, entonces siempre es posible encontrar un entero finito n tal que $na > b$. El infinitesimal que había sido el sujeto de muchas controversias y muchos consideraban que contenía un elemento de misticismo, fue desterrado por Weierstrass y Cantor de sus conceptos matemáticos. En años anteriores se consideraba al infinitesimal necesario para la explicación del continuo lineal. Johann Heinrich Lambert escribió a Holland en una cara del 7 de abril de 1766, sobre el «ángulo de contacto» lo que sigue:[8]

> «¿Usted cree, mi querido señor, que uno puede prescindir del concepto de lo infinitamente pequeño en el concepto de continuidad? ...La continuidad exige que su variación sea menor que toda cantidad asignable. Luego, es imposible estimar esta variación por medio de una cantidad finita, y tampoco puede ser igual a cero. Allí parece que no queda más que decir, por tanto, que el cambio en dirección es infinitamente pequeño.»

Las imposibilidades de una generación frecuentemente llegan a ser las posibilidades de otra generación posterior. El destierro de lo infinitamente pequeño, debido a Weierstrass, se encuentra ampliamente respaldado; el antiguo infinitesimal ya no es necesario para explicar el continuo. El rechazo de lo infinitamente pequeño es considerado por filósofos y lógicos matemáticos tales como Bertrand Russell[9] y Whitehead[10] como pasos hacia un rigor matemático mayor. Debe hacerse énfasis, sin embargo, en que la escuela de Weierstrass no encontró reconocimiento universal; hay defensores modernos de lo infinitamente pequeño, el más importante de los cuales es el matemático italiano Giuseppe Veronese. Ellos insisten en que el continuo de Cantor no es el único continuo no contradictorio posible y proceden a construir un continuo más elevado y más complicado no arquimedeano, donde se dan distancias infinitamente pequeñas. Este no es el lugar para intentar dar un informe minucioso sobre la controversia entre las dos escuelas; la controversia, dicho sea de paso, no tiene un aspecto nacional. Ha habido seguidores de Veronese en Alemania (p. ej., Stolz, Max Simon) y seguidores de Weierstrass y Cantor en Italia (p. ej., Peano). Hasta donde tenemos noticias, los argumentos de Zenón no han sido estudiados ni se les ha dado un tratamiento explícito con base en el continuo de Veronese.[11] En los Estados Unidos, C. S. Peirce se ha adherido a la idea de infinitesimales en la declaración: «El esclarecimiento del tema por medio de una notación estricta para la lógica de relativos me había mostrado, clara y evidentemente, que la idea de un infinitesimal no involucra contradicción.»[12] Aparentemente, antes de haberse familiarizado con los escritos de Dedekind y Georg Cantor, C. S. Peirce había reconocido firmemente que para conjuntos infinitos el axioma de que el todo es mayor que su parte no se cumple.

NOTAS:

1. Para detalles véase Georg Cantor, «Ueber die verschiedenen Standpunkt. in Bezug auf das actuele Unendliche» in *Zeitschr. f. Philos, u. phi1os, Kritik.* Bd. 88, p. 224.

2. *L'anée philosophyque,* I, 1890, p. 84, citando entre otras cosas *leçons de physique genéra1e,* 1868, de Cauchy, como sigue: "Cette proposition fondamentale, démontrée par Galilée (qu'on ne saurait admettre une auite ou série actuellement composée d'un nombre infini de termes), s'applique aussi bien a una série de termes ou d'objects, qui ont existé". [Esta proposición fundamental demostrada por Galileo (que no podríamos admitir una sucesión o series realmente compuestas de un número infinito de términos), se aplica igualmente a una serie de términos o de objetos que existieron] Cauchy estuvo muy influenciado sobre este tema por los escritos de Gerdil.

3. Véase *Bolyai's Science Abso1ute of Space,* de Halated, 4a. ed., 1896, §24, p. 20.

4. Véase H. Bergmann, *Des philosophische Werk Bernard Bolzanos,* Halle, 1909; también F. Prihonsky, *Dr .Bernard Bolzano's Paradoxien des Unendlichen,* Berlín, 1889.

5. *Proceedings London Mathematical Society,* Vol. 35, Londres, 1903, p.117

6. *Grundlangen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre,* von Georg Cantor, Leipzig, 1883, p. 29.

7. H. Poincaré, *The Foundations of Science,* trad. por G. B. Halsted, Nueva York, 1913, introducción por Josiah Royce, p.16.

8. *J. H. Lamberts deutscher gelchricr Briefwechsel,* Vol. I, Berlín, 1781. p. 141.

9. Véase por ejemplo su artículo en el *International Montly* Vol. 4, 1901. p. 84 y ss.

10. A. N. Whiteheed, *Introduction to Mathematics,* Nueya York y Londres, 1911, pp. 156, 226-229.

11. Las referencias a esta controversia son las siguientes: G. Veronese, *Grundzüge der Geometria von mhreren Dimensionen* übersetzt v. A. Schepp. Leipzig, 1894. Anbang. p. 631-701; Max Simon, "Historische Bemmerkungen über des Continuum, den Punkt und die Gerade Linie", *Atti del IV, Congresso Internazionale dei matematici,* Roma, 1908. pp. 385-390; Carta de G. Cantor a Vivanti, *Rivista di mat.* V, 104-108: Carta de G. Cantor a Peano, *Rivista di mat.,* V. 108-109; G. Cantor, "Zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre I", *Mathematische Annalen,* Vol. 46. 1895, pág. 500; Frederico Enriques, *Probleme der Wiasenachaft,* 2. Teil, übersetzt von K. Grelling, Leipzig und Berlín. 1910, pp. 324-329. Josiah Royce, un filósofo familiarizado con el pensamiento matemático, da una hábil discusión sobre el infinito, los infinitesimales y el continuo, en su *The Worls and the Individual,* Nueya York, 1900, pp. 5O5-560. Véase también G. Cantor, "Mitteilungen zur

Lehre vom Transfiniten" in *Zeitsch, für Philosophie u. Philosophische Kritik,* Vol. 91, Ha1le, 1887, p. 113; O. Stolz en *Mathematische Annalen,* Bd. XVIII, p. 699; también en *Berichte des naturw, medizin. Vereins in Innsbruck.* Jahrgänge 1881-82 und 1884. también en *Vorlesungen über allgem. Arithm,* Leipzig. 1. Thei1, 1885. p. 205.

12. C. S. Peirce. "The Law of Mind" en *The Monist,* Vol. 2. 1892. p.537.

IX

E. Disensiones post-cantorianas

El *Allgeimeine Functionentheorie* de Paul du Bois-Reymond, Tübingen, 1882, tiene un modo de exposición muy franco y brillante pero quizás carece de la originalidad y profundidad de los escritos de Dedekind y Georg Cantor. Este libro, que es contemporáneo a la creación de Cantor, discute la filosofía y la teoría de los conceptos fundamentales de cantidad, límite, argumento, función. Declara que las dificultades que rodean a la idea de un límite no son de carácter matemático, sino que tienen sus raíces en las «partes más simples de nuestro pensamiento, nuestros conceptos o imágenes» (Vorstellungen). Dice que hay dos concepciones la de los idealistas y la de los empíricos, «que tienen el mismo derecho a tomarse en cuenta como puntos de vista fundamentales de ciencia rigurosa»,[1] ya que ninguno de los dos produce resultados contradictorios, al menos en matemáticas puras. El autor presenta ambos puntos de vista «con el mismo rigor», y no le da la victoria a ninguno de los dos. El idealista defiende la existencia no sólo de lo que puede ser imaginado, sino también de las cosas inimaginables;[2] asume una actitud trascendental. Consecuentemente supone la terminación de series, como aquellas dadas por fracciones decimales interminables, las cuales están realmente «dadas» solamente hasta cierto término; reconoce el límite de estos decimales. Por otro lado, el empírico dice, «todo lo que está científicamente establecido brota de la percepción sensorial; cualquier cosa que sea inimaginable debe rechazarse; debemos ir de imágenes a imágenes (von Vorstellungen zu Vorstellungen)”[3] niega la existencia de un límite de una fracción decimal interminable y se contenta con tomar en cuenta tantos miembros del decimal como se puedan desear. Un continuo como el de Georg Cantor y Dedekind no existe porque no puede ser imaginado. Tomemos el decimal interminable $0.\ a_1\ \ a_2\ \ a_3$

> “En un dibujo ... imagina los extremos de las distancias $0.\ a_1,\ 0.\ a_1a_2,$ marcados a partir del punto cero y designados por líneas finas y cortas dibujadas cortando el segmento de línea. Estos cortes cada vez son más densos, y en algún momento deben detenerse, porque los medios para dibujar ya no nos sirven y a ninguna velocidad podemos dibujar un número ilimitado de marcas. Después de un corto intervalo que continúa de la marca $0.\ a_1\ \ a_2\ \ \ \ a_p$, al cual llamaremos el intervalo de niebla, sigue ahora una marca fina, un poco más larga que las anteriores, que representa al límite. En el intervalo de niebla anterior al límite toda clase de apariciones filosóficas representan sus papeles. Aquí representan sus famosos sofismas; es esto lo que el idealista convierte en las *quantitates infinitesimas.* El dibujo del empírico se ve un poco diferente. Las marcas se continúan aun si los

medios para dibujar no permiten que las marcas se distingan. Entonces las marcas se enciman, para mostrar que su grosor es mayor que la distancia $0.a_1 a_2 \quad a_p$ a partir del límite. Se detiene el dibujo de más marcas cuando ya no pueda reconocerse el avance ulterior de las marcas y las nuevas marcas quedarían en el mismo lugar. Ese es entonces el límite». [4]

El proceso de una variable acercándose continuamente, pero nunca alcanzando su límite es caracterizado por du Bois-Reymond como sigue:[5]

«Entre la concepción del idealista, quien hace a *dx* infinitamente pequeño y lo relaciona con la idea de algo en reposo, inmutable, y mi concepción que supone a *dx* finito y suficientemente pequeño, aunque de la misma manera en reposo, se desliza una tercera concepción (mencionada en las páginas 83, 84) en la cual, como comúnmente se dice, *dx* es una cantidad en el acto de desaparecer (quantité évanouissante), por lo tanto una cantidad que está continuamente variando hacia el cero. La idea de una cantidad en flujo continuo me repugna. Va contra mi naturaleza tener símbolos en mi fórmulas para cantidades que se ponen en movimiento tan pronto veo las fórmulas, y se apresuran hacia el cero, aunque solamente les está permitido alcanzarlo al final del cómputo. Mientras el libro está cerrado, reina un profundo silencio. Tan pronto como lo abro comienza esa carrera hacia el cero de todas las cantidades afectadas por una *d*. »

Muchos matemáticos de la vieja escuela sin duda han tenido esta clase de sentimientos. Esta aproximación perpetua sin alcanzar nunca la meta es fastidiosa. ¿Por qué no divorciar a la variable y a su límite de las limitaciones del tiempo? O si, como en los problemas mecánicos, la idea del tiempo es difícil de eliminar, apresurar los pasos sucesivos de acercamiento al límite, disminuyendo los tiempos para estos pasos a una velocidad suficientemente rápida, de manera que los elementos de tiempo formen una serie convergente. De este modo se alcanza el límite en un tiempo finito. El «Aquiles» es una ilustración concreta de tal aproximación y alcance del límite.

Ocho años después de la publicación del libro de du Bois-Reymond apareció una monografía póstuma preparada por un privat-docent en filosofía de la Universidad de Strassburgo, Dr. Benno Kerry. Es un estudio filosófico de la teoría de límites.[6] Kerry, familiarizado con el libro de du Bois-Reymond, así como con el trabajo de Dedekind y Georg Cantor, produjo una publicación muy esclarecedora. Ni Kerry ni du Bois-Reymond discutieron directamente sobre Zenón.

En 1885 se abrió en Francia una discusión sobre los argumentos de Zenón contra el movimiento, la cual duró más de una década y en la que participaron muchos escritores. En ninguna otra década y en ningún otro país la discusión sobre el tema fue tan persistente y general. Nunca antes los escritores filosóficos hablan basado sus soluciones sobre las paradojas de Zenón tan persistentemente sobre el postulado de la discontinuidad del tiempo y del espacio. Entre los participantes en la discusión estaban los matemáticos

Paul Tannery, G. Milhaud, G. Frontera, G. Mouret, y L. Couturat, pero la parte conductora estuvo en manos de los filósofos franceses Ch. Renouvier, F. Evellin, G. Noël, V. Brochard, y G. Lechalas.

En 1885 el célebre historiador de matemáticas, Paul Tannery, publicó un artículo, *Le concept scientifique du continu. Zénon d'Elée et Georg Cantor,*[7] del cual hicimos notar al comienzo de esta historia presenta una explicación brillante y novedosa sobre el *propósito* de los argumentos de Zenón. Concluyó con una descripción del continuo de Cantor. Este artículo fue apoyado por un trabajo debido a Gaston Samuel Milhaud, quien fue sucesivamente profesor de matemáticas en los liceos de Nizza, Havre, Lille y Montpellier y quien fue, desde 1895, profesor de filosofía en la Universidad de Montpellier. Aparte de esto el artículo de Tannery casi no recibió atención. Las discusiones llevadas a cabo durante la década no se centran en el continuo de Cantor. Las ideas de Cantor eran entonces muy recientes y aún no estaban completamente elaboradas. El artículo de Milhaud, al que nos referimos anteriormente llevó el título de *Le concept du nombre chez les Pythagoriciens et les Eléates.* Antes de éste, Milhaud había escrito un diálogo filosófico sobre *La notion de limite en mathématiques*,[8] que abiertamente intentaba esclarecer el «Aquiles». *A* y *B* discuten sobre el tema. *A* declara que la mente no puede abarcar a la vez una serie ilimitada de elementos; *B* declara que esta cualidad negativa de nuestra mente no tiene nada que ver con la existencia o no existencia de un límite alcanzable. Que el límite sea realmente alcanzado o no, no interesa al matemático y es ajeno a 1as matemáticas. Aunque es un diálogo inteligente, fue criticado por Ernest Jean Georges Mouret, ingeniero en jefe de caminos, canales y puertos, por evadir el problema principal en el Aquiles y no eliminar las dificultades subyacientes.[9]

Victor Brochard escribió sobre Zenón en 1885, en una memoria para l'Académie des Sciences morales et politiques, y de nuevo en 1893, en un artículo titulado, *Les prétendus sophismes de Zénon d'Elée*.[10] Principalmente se preocupa de la cuestión del propósito de Zenón y está a favor de los puntos de vista tradicionales y no de los de Tannery y Milhaud. En la primera publicación Brochard expresó la creencia de que Zenón pretendió realmente negar todo movimiento. En el artículo posterior prefiere hablar de los *argumentos* de Zenón en vez de los *sofismas* de Zenón.

G. Frontera publicó un folleto titulado *Etude sur les arguments de Zénon d'Elée contre le mouvement,* París, 1891. En el prefacio declara que fue inducido a preparar este estudio por el hecho de que algunos jóvenes estudiantes de filosofía le informaron que en ciertas conferencias sobre filosofía a las que habían asistido, se pensaba seriamente que el «Aquiles» no tenía explicación posible y que el movimiento era una ilusión de los sentidos. Frontera sostiene los puntos de vista de un matemático que no ha sido tocado por las ideas de G. Cantor. Habla en la «dicotomía» de una *serie* infinita de partes, en vez de un *número* infinito de partes, «parce que l'idée de nombre exclut l'idée de l'infini». Dice que Zenón consideró solamente el espacio, mientras que el tema requiere de la consideración de tres cosas, espacio tiempo y velocidad. La suma de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etc. de una distancia no puede ser infinita como aseguraba Zenón, sino que debe ser finita. Al manejar series, se nota que Frontera no conocía los trabajos de S. Vincent y de otros escritores sobre el «Aquiles», con excepción de los escritores franceses contemporáneos V. Brochard, F. Evellin. Habla en términos elogiosos del trabajo de de Evellin, *Infini et quantité.* Escribe la serie convergente para el tiempo necesario para alcanzar a la tortuga. Insiste directamente en que las velocidades de Aquiles y la tortuga deben mantenerse hasta el final, pero Zenón no hace esto y llega a una conclusión absurda por la suposición tácita de condiciones quiméricas. Al "estadio" lo considera simplemente un problema de movimiento relativo. G. Mouret[11] critica a Frontera por pasar de la serie a su límite sin percatarse que es precisamente aquí donde yace la dificultad. Mouret declara que "Aquiles" constituye realmente una crítica de los fundamentos de las series convergentes y del cálculo infinitesimal. Frontera responde[12] haciendo énfasis en su argumento anterior de que la dificultad con el "Aquiles" ha sido la hipótesis quimérica presentada por Zenón y sus seguidores durante casi 2500 años.

Louis Couturat[13] objetó la observación de Mouret de que los argumentos de Zenón eran una crítica a los principios fundamentales del cálculo y de las series. La afirmación de Mouret de que Zenón arbitrariamente excluye el punto de encuentro en el "Aquiles" no es una interpretación históricamente correcta; Zenón afirmaba que, para llegar al punto de encuentro, Aquiles tenía que pasar a través de una infinidad de espacios, lo cual Zenón pensaba que era imposible. La fuerza del argumento de Zenón consiste, según Couturat, en el axioma que aún hoy en día es aceptado como evidente por muchas buenas cabezas: "El infinito actual no puede ser realizado"*; cualquier movimiento debe contener una infinidad actual de partes, lo cual Zenón decía que era imposible. El sofisma de Zenón, si es que existe, es más sutil y más profundo del que Mouret percibe; no es un paralogismo burdo cuya falsedad inmediatamente salta a la vista.

En el año de 1893 la discusión continuaba sin disminuir. Georges Noël contribuyó con un artículo, *Le mouvement et les arguments de Zenón d'Elée*[14], que en muchos aspectos es una discusión hábil, pero desafortunadamente el autor no siempre distingue entre lo que se supone y lo que es resultado de la lógica clara, con la precisión que se necesita para dilucidar un tema tan difícil como el movimiento; el artículo esta salpicado de suposiciones ocultas. Noël dice que tan pronto como uno capta la verdadera naturaleza del movimiento, es fácil refutar a Zenón. Zenón dividió el desplazamiento en un número infinitamente creciente de desplazamientos más pequeños, destacándolos como eventos distintos que deben concurrir para producir el evento final. Estos desplazamientos más pequeños, infinitos en número, no están todos dados; por lo tanto Zenón concluye que el evento final no puede llevarse a cabo. Pero, dice Noël, los desplazamientos más pequeños no son en absoluto condiciones verdaderas para la ocurrencia del evento final. Son eventos coordinados, pero no subordinados. El evento final deriva su razón de ser (raison d'etre) directamente del estado del movimiento y de su velocidad. De este modo todas las posiciones tomadas por el punto en movimiento están dadas y todas están sobre una misma base. Su orden de sucesión en el tiempo no es de ninguna manera un orden de dependencia 1ógica. Lógicamente todas están dadas con el movimiento. Poco importa si son infinitas en número. Ni el cuerpo en movimiento ni la mente que lo contempla está realmente obligada a numerarlas. Estas no introducen ninguna división real en e1 movimiento. Es un movimiento, y su continuidad excluye toda división actual. Los movimientos particulares no existen más que desde un arbitrario punto de vista subjetivo. De este modo la «dicotomía» y el «Aquiles» son sofismas reales, pero de naturaleza tal que la mente humana está casi inevitablemente encantada con ellos, mientras desprecie someter los principios fundamentales a un análisis crítico. El movimiento no es una sucesión de posiciones, es un «llegar a ser».**

Noël ataca a los partidarios de la discontinuidad, como F. Evellin, quien postula la existencia de una distancia mínima y de un tiempo mínimo. Noël argumenta que esa existencia mínima está refutada por la «flecha» y el «estadio».

Muchos años antes de esto Ch. Renouvier[15] y F. Evellin[16] argumentaron en contra del infinito actual y a favor de la discontinuidad del tiempo y del espacio; e1 número de partes en que puede dividirse e1 camino *AB* es finito o infinito, pero el número no puede ser infinito sin que lo inagotable se encuentre agotado, por lo tanto el número es finito. Además de su libro sobre *Infini et quantité,* Evellin publicó unos artículos en 1893[17] y en 1894[18] en 1os que elabora sus ideas con referencia a nuestro tema. La explicación de Noël de la naturaleza del movimiento no le llama la atención; 1a hipótesis de Noël del movimiento como un «1legar a ser» proporciona solamente una ilusión momentánea de haber escapado de las dificultades puestas por el dialéctico de Elea. Evellin declara que los cuatro argumentos de Zenón presentan dos ramificaciones de un dilema. La «dicotomía» y el «Aquiles» están dirigidos a los matemáticos con su infinito; la «flecha» y el «estadio» están dirigidos a los partidarios de la división limitada. Niega lo infinito y explica a Zenón suponiendo la discontinuidad del tiempo y del espacio, y la existencia de partes indivisibles del espacio y del tiempo. Sobre la hipótesis de la divisibilidad ilimitada declara que Zenón refutó con éxito el movimiento. Evellin dice que el concepto de una línea debe ser tal que explique el movimiento. La línea debe tener partes; el movimiento agota a la línea y por lo tanto también a sus partes; entonces, esas partes tienen un número, pero este número se nos escapa. Cada momento del movimiento debe marcar un avance, pero no hay avance excepto en lo agotable y lo finito. La «dicotomía» y el «Aquiles» hacen esto muy claro. Evellin niega que el «estadio» refute la posibilidad de indivisibles.

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} & a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 & \\ & a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

Si en un momento indivisible las líneas indivisibles representadas por a, b, c, a_1, etc., se deslizan de manera que a_2 quede en c_1, la pregunta que surge es ¿cómo pueden tener tiempo para encontrarse a_2 y b_1? Si se supone la discontinuidad del espacio, indudablemente deben pasar una a la otra, pero no necesitan encontrarse en absoluto en caso de discontinuidad.

Otro defensor de la discontinuidad es Georges Lechalas. En 1895 publicó un libro, un *Etude sur l'espace et le temps,* París, del cual apareció una edición aumentada en 1910. En 1893 colaboró con un artículo sobre Zenón.[19] Empieza con la máxima que, hasta donde concierne al número concreto de cosas en el mundo real, número siempre significa número *finito*. Distingue ente el número abstracto y correcto. Estudió a G, Cantor y no pone objeciones al infinito actual, dado que este concepto está confinado al número abstracto. Reclama contradicción en su realización. Todos los conjuntos concretos, dice, pueden ser contados por el proceso ordinario. Niega la posibilidad de un continuo real y en consecuencia concluye que tanto el espacio como el tiempo son discontinuos. Aunque coincide con Evellin en lo concerniente a la discontinuidad, Lechalas no está de acuerdo con la existencia de una distancia mínima y de un tiempo mínimo. La manera como Evellin se evade de las garras del "estadio" no lo satisface. Si el átomo es indivisible, dice Lechalas, no es un mínimo de extensión; la extensión no es una propiedad de los átomos, sino una relación entre ellos. Un punto al moverse de una posición a otra ocupa en el "estadio" a_2 y b_1 pueden no estar en ningún momento en la misma línea vertical. Usando la discontinuidad como varita mágica, lleva a_2 hasta c_1, sin encontrarse con b_1.

NOTAS:

1. Paul du Bois-Reymond,*Die Allg. Functionentheorie*, Tubingen,1882, p.2
2. Paul du Bois-Reymond,*op. cit.,* pp.110,111.
3. Paul du Bois-Reymond,*op. cit.,* p. 149.
4. Paul du Bois-Reymond,*op. cit.,* pp. 122,123.
5. Paul du Bois-Reymond,*op. cit.,* pp. 140,141.
6. Dr. Benno Kerry, *System einer Theorie der Grenzbegriffe, Ein Beitrag zur Erkenntnisstheorie.*Herausgeben v. Guatav John, Leipzig u. Wien. 1890.
7. *Revue philosophique de la France et de l'étranger,* Dixième, anée, XX, 1885, París, pp. 385-410.

Exceptuando la parte sobre G. Cantor, este artículo está reproducido casi a1 pie de 1a letra en P. Tannery, *Pour l'histoire de la science bellene,* París, 1887, Cap. X, pp. 247-261.

8. *Revue philosophique* [Th. Ribot], Vol. 32, París, 1891, p. 1.

9. "Le problème d'Achille" por George Mouret, en *Revue philosophique,* Vol. 33, París, 1892, p. 67.

10. *Revue philosophique et de morale.* I, 1893, París, pp. 209-215.

11. *Revue philosophique,* Vol. 33, 1892, p. 67.

12. *Revue philosophique* Vol. 33, 1892, p. 311.

13. *Revue philosophique* Vol. 33, 1892,1 p. 314.

* N.T. Textualmente dice «The actua1 ifinite cannot be realized".

14. *Revue philosophique et de morale,* I, 1893, pp. 107-125.

** N.T. Textualmente dice "becoming".

15. *Esquisse d'une classification systematique des doctrines philosophiques,* T. l, París, 1885. La prueba de Renouvier de la existencia del infinito actual, así como otras pruebas de lo mismo, están examinadas críticamente por Georg Cantor en su artículo, "Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten" *Zeitschr, f. Philosophie und philosophische Kritik* Bd. 91, Separatabdruc, Halle, p. 22.

16. François Evellin, *Ifini et quantité,* l880.

17. "Encore a propos de Zenón d'E1ée." *Revue philosophique et de morale,* I, p. 382.

18. «La divisibilité dans la grandeur», *Revue philosophique et de morale,*II, pp. l29-152.

19. «Note sur les arguments de Zenón d'Elée» , en *Revue philosophique et de morale,* I, 1893, p. 396.

X

Disensiones post-cantorianas (concluye)

Con el advenimiento del nuevo siglo, las discusiones sobre Zenón empezaron a calmarse en Francia. Notamos solamente dos artículos. En 1907 O. Hamelin escribió sobre la "flecha", pero el interés de este artículo se centra en las que constituyen las interpretaciones más probables del texto aristotélico.[1] En 1909 Dunan[2] hizo un novedoso intento para resolver las paradojas de Zenón en un artículo donde se retracta de lo que dijo sobre el tema en un folleto en 1889.[3]

Dunan cree que las dificultades se desvanecen al reconocer que el movimiento se lleva a cabo a través de un espacio, uno e indivisible, sin sucesión ni partes. Admite que una proposición tal origina una dificultad considerable que no puede eludirse más que por medio de una metafísica larga y elaborada, de la cual en su artículo sólo da un simple esquema.

No menos radical es la posición de Henri Bergson. Sostiene que la filosofía debe retomar a la realidad misma. La realidad está alimentada por la intuición. La intuición pura, externa o interna, es la de la continuidad no dividida. Todo movimiento en tanto que es un pasaje del reposo al reposo es, de hecho, absolutamente indivisible. La vista percibe el movimiento en la forma de una línea que es recorrida, y esta línea, como todo el espacio, puede ser dividida indefinidamente. No debemos confundir los datos de los sentidos, se percibe al movimiento como un todo dividido, con el artificio de la mente que divide en partes el camino recorrido. Bergson dice:[4]

> "Se sustituye el camino por el viaje, y como el viaje está subtendido por el camino se piensa que los dos coinciden. Pero ¿cómo es que un *progreso* coincide con una cosa, un movimiento con una inmovilidad?... Y a partir del hecho de que esta línea es divisible en partes y que termina en puntos, no podemos concluir que la duración correspondiente está compuesta de partes separadas o que está limitada por instantes. Los argumentos de Zenón no tienen otro origen que esta ilusión. Todos ellos consisten en hacer que el tiempo y el movimiento coincidan con la línea que los sustenta, en atribuirles a ellos las mismas subdivisiones que a la línea, en una palabra, es tratarlos como a la línea. En esta confusión Zenón fue alentado por el sentido común, que da al movimiento las propiedades de su trayectoria; y también por el lenguaje, que siempre traduce movimiento y duración en términos del espacio... Pero el filósofo que razona sobre la naturaleza interior del movimiento está obligado a devolverle la movilidad que es su esencia, y es lo que Zenón omite. Por medio del primer argumento (la dicotomía) supone que el cuerpo en movimiento está en reposo, y luego no considera más que las

etapas, infinitas en número, que están a lo largo de la línea que va a recorrerse: no podemos imaginar, dice, cómo podría pasar el cuerpo a través del intervalo entre ellas. Pero de esta manera solamente prueba que es imposible construir *a priori* un movimiento con inmovilidades, *cosa* que nadie pondría en duda. La única cuestión es si, declarando al movimiento como un hecho, hay una especie de absurdo retrospectivo al suponer que se ha pasado a través de un número infinito de puntos. Pero esto no debe asombrarnos, ya que el movimiento es un hecho no dividido, o una serie de hechos no divididos, mientras que la trayectoria es infinitamente divisible. En el segundo argumento (el Aquiles) el movimiento indudablemente está dado, incluso se atribuye a dos cuerpos moviéndose, pero, siempre por el mismo error, hay una suposición de que su movimiento coincide con su camino, y que podemos dividirlo, al igual que al camino, del modo que queramos. Entonces, en vez de reconocer que la tortuga tiene el paso de una tortuga y Aquiles el paso de Aquiles, de manera que después de cierto número de estos actos o saltos indivisibles Aquiles habrá rebasado a la tortuga, el argumento es que podemos desarticular como queramos el movimiento de Aquiles, y también como deseemos, el movimiento de la tortuga; y así reconstruir ambos de manera arbitraria, de acuerdo con una ley de nuestra invención que pueda ser incompatible con las condiciones reales de movilidad. La misma falacia aparece, aún más evidente, en el tercer argumento (la flecha) el cual consiste en la conclusión de que, por ser posible distinguir puntos en la trayectoria de un cuerpo en movimiento, tenemos derecho a distinguir momentos individuales en la duración de su movimiento. Pero el más instructivo de los argumentos de Zenón es quizás el cuarto (el estadio) el cual, creemos, ha sido injustamente desdeñado, y del que el absurdo está más manifiesto solamente porque el postulado, enmascarado en los otros tres, está aquí francamente expuesto. Sin entrar en una discusión que estaría aquí fuera de lugar, nos contentamos con observar que el movimiento, como está dado a la percepción espontánea, es un hecho que es muy claro, y que las dificultades y contradicciones señaladas por la escuela eleática tienen menos que ver con el movimiento vivo mismo que con una reorganización muerta y artificial del movimiento hecha por la mente."

Bergson discute la "flecha" de manera más completa en su *Evolution creative*, 1907, donde se refiere[5] al absurdo de considerar movimiento como hecho de inmovilidades. Dice:

"La filosofía percibió esto tan pronto como abrió los ojos. Los argumentos de Zenón de Elea, aunque están formulados con una intención diferente, no tienen otro significado... La inmovilidad en cada punto de su recorrido, es la inmovilidad durante todo el tiempo de su movimiento. Sí, si suponemos que la flecha puede alguna vez estar en un punto de su trayectoria. Sí otra vez, si la flecha, que se está moviendo, alguna vez coincide con una posición que esté inmóvil. Pero la flecha nunca está en ningún punto de su trayectoria. Lo más que podemos decir es que podría estar allí, en el sentido de que pasa por allí y podría detenerse allí... Fijemos un punto *C* en el intervalo recorrido, y digamos que en un cierto momento la flecha estuvo en *C*. Si hubiera estado allí se habría detenido allí y ya no podríamos haber tenido un vuelo de *A* a *B*, sino dos vuelos, uno de *A* a *C* y el otro de *C* a *B*, con un intervalo de reposo. Un solo movimiento es exclusivamente, por la hipótesis, un movimiento entre dos paradas; si hay paradas, no es ya un solo movimiento."

Ha habido muchas discusiones sobre Bergson. Un escritor se empeña en señalar sus errores retomando al continuo de Aristóteles y Tomás de Aquino.[6]

Las críticas por Bertrand Russell, de Cambridge, Inglaterra, son más pertinentes para nuestro tema y están expuestas en las siguientes citas:[7]

"... se dirá, la flecha está donde está en un momento cualquiera, pero en otro momento está en alguna otra parte, y esto es precisamente lo que constituye el movimiento. Es cierto que surgen algunas dificultades de la continuidad del movimiento, si insistimos en suponer que el movimiento también es discontinuo. Estas dificultades, así obtenidas, han sido por mucho tiempo parte del repertorio de los filósofos. Pero si, con los matemáticos evitamos la suposición de que el movimiento también es discontinuo, no caeremos en las dificultades de los filósofos. Un cinematógrafo en el que hay un número infinito de películas, y en el que nunca hay una *siguiente* película porque viene un número infinito entre dos culesquiera, representará perfectamente un movimiento continuo. Entonces ¿en dónde está la fuerza del argumento de Zenón?... Zenón supone, tácitamente, la esencia de la teoría bergesoniana del cambio. Es decir, supone que cuando una cosa está en proceso de cambio continuo, aunque sólo se trata de cambio de posición, debe haber en la cosa algún estado interno de cambio. La cosa debe, en cada instante, ser intrínsecamente diferente de lo que sería si no estuviera cambiando. Luego destaca que en cada instante la flecha simplemente está donde está, precisamente como estaría si estuviera en reposo. Por lo tanto concluye que no puede haber una cosa como un *estado* de movimiento y, en consecuencia, al adherirse al punto de vista de que para el movimiento es esencial un estado de movimiento, infiere que no puede haber movimiento y que la flecha siempre está en reposo. El argumento de Zenón, por lo tanto, aunque no toca la consideración matemática de cambio, refuta *prima facie* un punto de vista sobre el cambio que no es muy diferente del de M. Bergson. Entonces ¿cómo es que M. Bergson aborda el argumento de Zenón? Lo aborda negando que la flecha esté alguna vez en alguna parte. Después de enunciar el argumento de Zenón, responde: 'Sí, si suponemos que la flecha puede alguna vez *estar* en un punto de su trayectoria. Sí otra vez, si la flecha, que se está moviendo, alguna vez coincide con una posición que esté inmóvil. Pero la flecha nunca *está* en ningún punto de su trayectoria.' (C. E., p. 325). Esta respuesta a Zenón, o una muy similar concerniente a Aquiles y la tortuga, se presenta en sus tres libros. El punto de vista de Bergson es simplemente paradójico; que sea *posible*, es una cuestión que requiere una discusión de su modo de ver la duración. Su único argumento a favor de esto es la declaración de que el punto de vista matemático sobre el cambio ‘implica la proposición absurda de que el movimiento está hecho de inmovilidades.’ (C. E., p. 325). Pero el absurdo aparente de este punto de vista se debe simplemente a la forma verbal en la cual lo ha enunciado, y se desvanece tan pronto como nos damos cuenta de que el movimiento implica relaciones. Por ejemplo, una amistad está formada por personas que son amigas, pero no por amistades... De modo que un movimiento está formado por lo que se está moviendo, pero no por movimientos. Eso expresa el hecho de que una cosa pueda estar en lugares diferentes en tiempos diferentes, y que los lugares puedan todavía ser diferentes sin importar que tan cercanos puedan estar los tiempos. El argumento de Bergson contra el punto de vista matemático sobre el movimiento, por lo tanto se reduce, en el último análisis, a un simple juego de palabras...

“Las matemáticas conciben el cambio, aun el cambio continuo, como constituido por una serie de estados; Bergson por el contrario, alega que ninguna serie de estados puede representar lo que es continuo, y que en el cambio una cosa nunca está en ningún estado en absoluto...

“Uno de los efectos negativos de una filosofía antiintelectual, como la de Bergson, es que medra sobre los errores y confusiones del intelecto. Entonces se dirige a proferir el pensamiento negativo en vez del positivo, a declarar irresoluble toda dificultad momentánea, y a considerar todo error insignificante como muestra de la bancarrota del intelecto y del triunfo de la intuición... En lo que respecta a las matemáticas, deliberadamente ha preferido los errores tradicionales en interpretación a los puntos de vista más modernos que han prevalecido entre los matemáticos durante los últimos 50 años.”

De este modo se ve que entre los filósofos franceses recientes ha sido despreciado el continuo de Cantor y no se ha presentado algún sustituto satisfactorio.

Russell[8] da un tratamiento sobre el “Aquiles” completamente diferente del dado hasta ahora tanto por filósofos como por matemáticos. Después de explicar el número infinito y el continuo moderno, dice en el *International Monthly:*

“Ahora podemos entender por qué Zenón creía que Aquiles no puede alcanzar a la tortuga y por qué de hecho sí puede alcanzarla. Veremos que toda la gente que disentía con Zenón, no tenía derecho a hacerlo, porque todos aceptaban premisas de las que se obtuvo su conclusión [de Zenón]... Entonces él [Aquiles] nunca alcanzará a la tortuga. Porque en cada momento la tortuga está en alguna parte, y Aquiles está en alguna parte; y ninguno de los dos está nunca dos veces en algún lugar mientras la carrera se lleva a cabo. De esta manera la tortuga va exactamente a tantos lugares como Aquiles, porque cada uno está en un lugar en un momento y en otro lugar en otro momento y en otro en cualquier otro momento. Pero si Aquiles fuera a atrapar a la tortuga, los lugares donde la tortuga debía haber estado, serían solamente una parte de los lugares donde Aquiles habría estado. Aquí, debemos suponer, Zenón apeló a la máxima de que el todo tiene más términos que la parte. De este modo, si Aquiles fuera a alcanzar a la tortuga, él habría estado en más lugares que la tortuga; pero vemos que él debe en cualquier periodo, estar exactamente en tantos lugares como la tortuga. Por lo tanto inferimos que nunca puede atrapar a la tortuga. Este argumento es estrictamente correcto, si admitimos el axioma de que el todo tiene más términos que la parte. Como la conclusión es absurda, el axioma debe ser rechazado, y entonces todo va bien. Pero no hay una buena palabra para calificar a los filósofos de los últimos mil doscientos años, quienes han admitido todos el axioma y negado la conclusión: la conservación de este axioma conduce a contradicciones absolutas, mientras que su rechazo conduce sólo a rarezas."

Las conjeturas que hace Russell sobre la historia del "Aquiles" no tienen, en lo principal, ningún fundamento. No hay evidencia histórica para creer que Zenón basó el "Aquiles" en la doctrina de que el todo es mayor que cualquiera de sus partes. Aristóteles basa el argumento de Zenón en la afirmación de que una línea o distancia no puede reducirse mediante ningún proceso de divisiones sucesivas a elementos que son puntos matemáticos. La versión final de Russell de la paradoja es lo que Zenón podría haber dicho, pero no dijo realmente. Esta es más fácil de explicar que la de Zenón. Fácilmente se puede asegurar el asentimiento al hecho de que, en conjuntos infinitos, el todo no es mayor que ciertas de sus partes.[9]

C. D. Broad[10] destaca que el argumento de Russell, aunque correcto en sí, no tiene la misma dificultad experimentada por muchas personas, y señala que el "Aquiles" descansa en la falsa suposición de que "lo que está más allá de todos los puntos de una serie infinita de puntos, debe estar infinitamente más allá del primer punto de la serie". Broad consideraba importante aun en ese momento aclarar esta controversia, "porque ésta y las otras paradojas de Zenón se han vuelto el feliz coto de caza de los bergsonianos y enemigos afines del intelecto humano". Lo que hace a la divisibilidad infinita un tropezadero para tantos es el hecho de que se hace un llamado a la intuición sensorial y a la imaginación –la misma facultad de la mente que se muestra incapaz de lidiar con el problema. Pero nuestros poderes de análisis penetran reinos del pensamientos más allá del alcance de la imaginación, y es en ese territorio donde se hace que los argumentos de Zenón renuncien a sus misterios.

B. Russell también toma gran interés en la "flecha". En el *International Review* observó:

"Weierstrass, desterrando estrictamente de las matemáticas el uso de los infinitesimales, ha mostrado por fin que vivimos en un mundo que no cambia, y que la flecha en su vuelo, está verdaderamente en reposo. El único error de Zenón yace en inferir (si es que el infirió) que, ya que no hay cambio, entonces el mundo está en el mismo estado en un tiempo cualquiera como en cualquiera otro... Weierstrass ha sido capaz, al incorporar sus puntos de vista en matemáticas, donde la familiaridad con la cerdad elimina los prejuicios del sentido común, de investir a las paradojas de Zenón con el aire respetable de la trivialidad."

Donde quiera expresa Russell la misma idea con la afirmación de que "una variable no varía". [11]

Todavía en general se sostiene que una variable no puede alcanzar a su límite. En 1907 R. B. Haldane presentó esto como la enseñanza de matemáticas, en un discurso presidencial para la Aristotelian Society, titulado "The Methods of Modern Logic and the Conception of Infinity" (Los métodos de la lógica moderna y la concepción del infinito). En una revisión de este discurso, B. Russell dice:[12] que esta propiedad "pertenece a los límites de una cierta clase particular", que constituye "un caso extremadamente especial, que no se lleva a cabo en la mayoría de las series en las que los límites existen".

La creación de la teoría de conjuntos y del continuo de Cantor nos conduce a definiciones de límite modificadas. En esta teoría el concepto de límite estaba divorciado de la idea de cantidad y medida. La cuestión de si la variable alcanza su límite o no se ignora por no ser interesante. Si alcanza su límite o no depende de la naturaleza de la variación en un caso particular; la sucesión de valores puede incluir el límite o puede no incluirlo. El *punto limitante* de un conjunto de puntos es uno para el cual todo intervalo, no importa qué tan pequeño sea, que contenga al punto limitante, encierra a un punto del conjunto infinito del punto limitante mismo. Un *límite* es simplemente el equivalente aritmético del punto limitante en geometría. La introducción de un número transfinito como un límite ha acarreado consigo todavía una ulterior modificación de la idea de un límite. Los intervalos pequeños no concuerdan aquí. Bertrand Russell dice: "Si consideramos la serie total de enteros finitos, considerada como parte de esta serie, tiene un límite superior, a saber, el menor de los enteros infinitos (que es el número de enteros finitos)". Aquí no hay una "diferencia despreciable" entre variable y límite; "la diferencia entre los enteros finitos y su límite permanece constante e infinita". De nuevo dice: "Un límite no debe ser considerado como algo hacia lo cual los términos sucesivos de la clase se aproximan idefinidamente cerca; pueden estar todos a una distancia infinita del límite, o a una distancia que siga siendo permanentemente mayor que alguna distancia finita dada; o la serie en cuestión puede ser una en la cual no hay nada como distancia o diferencia". Su definición de límite es la siguiente: "Dada cualquier serie, y una clase ? de términos que pertenecen a la serie, se le llama *límite superior* de a ? un término *x* que pertenece a la serie, si todo término de a precede a *x*, y todo término de la serie que precede a x precede a algún miembro de ? ". Da una definición similar para límite inferior. [13] Debe observarse que las definiciones modernas de un límite están libres del concepto de infinitesimal antiguo.

Ahora, conforme nos detenemos y miramos hacia atrás, vemos que los filósofos de las matemáticas han dado una explicación completa y lógicamente correcta de los argumentos de Zenón sobre el movimiento. Mirando a nuestro alrededor, vemos que la cuestión todavía es considerada como una condición no aclarada. Los filósofos cuyos intereses intelectuales están muy alejados de las matemáticas están tomando poco interés en el continuo lineal creado por la escuela de Georg Cantor. Tampoco ofrecen un substituto satisfactorio. La dificultad más importante no es principalmente lógica, sino de postulados y supuestos. ¿Cuáles supuestos son razonables y útiles? Sobre este punto hay desacuerdo. Cantor y sus seguidores están deseando suponer un continuo que trasciende la intuición sensorial. Otros no desean hacerlo. He allí la divergencia. En el Korán hay una historia de que, después de la creación de Adán, les fue ordenado a los ángeles que le hicieran la debida reverencia. Pero el jefe de los ángeles rehusó, diciendo:

"Muy lejano está el que yo, un espíritu puro, adore a una criatura de barro". Por rehusarse fue expulsado del Paraíso. El castigo de ese jefe, en lo que respecta al paraíso matemático, espera a aquellos que rehusan examinar con el cuidado debido a la creación masiva de nuestros grandes matemáticos, sin los cuales el más leve estremecimiento de la hoja de un árbol permanece incomprensible.[14]

NOTAS:

1. *L'année philosophique*, de F. Pillon, París, 1907, pp. 39-44.
2. "Zenón d'Elée et le Nativism" en *Anna1es de Philosophie Chrétienne*, 1909.
3. *Les arguments de Zénon d'E1ée contre le mouvement*, Nantes, 1884.
4. H. Bergson, *Matter and Memory*, trad. Inglesa por Nancy M. Paul y W. Scott Palmer, Londres, 1911, pp. 248, 250-253. La primera edisión francesa apareció en 1896.
5. H. Bergson, *Creative Evolution* trad. inglesa por A. Mitchell, Londres, 1911, pp. 325-327.
6. T. J. Gerrard, *Bergson an Exposition and Criticism*, Londres y Edimburgo, 1913, pp. 2388.
7. B. Russell, "The Philosophy of Bergson",*The Monist*, julio, 1912. Las referencias de Russell (C.E.) son de 1a traducción inglesa de la *Creative Evolution* de Bergson.
8. Véase B. Russell,*Principles of Mathematics*,1902, "Recent work on tbe Principles of Mathematics" en e1 *International Monthly*, Vol. IV, 1901, pp. 83-101.
9. En relación con esto puede ser de interés una anécdota relatada por De Morgan. Cuenta que "a un legendario profesor de Cambridge una vez le preguntaron, en una discusión matemática, 'Supongo que usted admitirá que el todo es mayor que su parte' y él respondió, 'yo no, hasta no ver qué uso va usted a hacer de ello'". El peligro de las implicaciones inintencionadas está ilustrado por un autor que observaba que Gibbon siempre tenía una copia de Horacio en su bolsillo y frecuentemente en su mano, de lo cual parecía deducirse que la mano de Gibbon a veces estaba en su bolsillo.
10. *Mind*, Vol. 38, 1913, pp. 318-319.
11. B. Russell, "Mr. Haldane on Infinity", *Mind*, Vol. 33, Londres, 1908, p. 240.

12. *Mind*, Vol. 33, 1908, p 239.

13. B. Russell, "Mr. Haldane on Infinity", *Mind*, Vol. 33, Londres, 1908, p. 240-241.

14. Después de la terminación de este artículo apareció el libro de Bertrand Russell *Our Knowledge of the External World as a Field for Scientific Method in Philosophy*, Open Court Company. 1914, en el que se pone mucha atención a los argumentos de Zenón. En *Mind* aparecerá un artículo sobre Zenón escrito por Philip E. B. Jourdain.