Artículo publicado en el *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 12, Tomo 1; Farfán R.M. (ed.). CLAME. Grupo Editorial Iberoamérica, México: 1999. Pp. 115-120.

INVESTIGANDO EL COMPORTAMIENTO DE PROCESOS INFINITOS A TRAVÉS DE MODELOS Y REPRESENTACIONES EN UN MICROMUNDO COMPUTACIONAL.

Dra. Ana Isabel Sacristán Rock
Cinvestav, México
asacrist@mail.cinvestav.mx

Es claro que el aprendizaje de conceptos relacionados con el infinito, como son los de límite y convergencia en cálculo, o el estudio de conjuntos infinitos son áreas que generalmente presentan dificultades. Uno de los problemas es que el infinito no se puede extraer a partir de las experiencias sensoriales; es un concepto mental que a menudo contradice al sentido común. Y aunque es un concepto básico en las matemáticas (como en el Cálculo) las áreas de la matemática donde se encuentra este concepto son aquellas que tradicionalmente son presentadas desde una perspectiva algebraico-simbólica, lo cuál dificulta la conexión entre el conocimiento formal y el intuitivo. Tomamos como reto crear situaciones en las que el infinito fuera más accesible.

En el caso del estudio del infinito matemático nos interesaba incluir varios tipos de representación en nuestro intento de hacer del infinito algo más "concreto", en particular: (i) el elemento visual (i.e. gráfico o geométrico), y (ii) los sistemas de representación provistos por los medios computacionales. La computadora permite el uso de representaciones simbólicas (en el código de programación), el acceso a representaciones numéricas y visuales dinámicas; y puede ser utilizada como un medio de exploración y donde los alumnos pueden expresar ideas (ver Noss & Hoyles, 1996). El marco teórico de nuestro trabajo, de corte constructivista, enfatiza la importancia de las representaciones en el proceso de aprendizaje: plantea en particular que el proceso de construcción de significados involucra el uso de representaciones y que el aprendizaje de un concepto puede ser facilitado cuando hay más oportunidades de *construir* e interactuar con representaciones (tan diversas como sea posible) externas del concepto (Harel & Papert, 1991).

Así pues, construimos un ambiente ó *micromundo*[1] computacional en el lenguaje Logo, que proporcionaba "herramientas abiertas" (ver diSessa, 1997) para que los estudiantes, mediante actividades de programación, pudieran construir y explorar diferentes tipos de representaciones — simbólica, gráfica, y numérica — de procesos infinitos, específicamente sucesiones y series infinitas. A través de estudios de caso de cuatro parejas de estudiantes mexicanos se analizó cómo las herramientas del micromundo fueron utilizadas para estructurar las actividades y a su vez dar sentido a los procesos estudiados.

Las actividades en Logo involucraron la construcción (programación) por parte de los alumnos de modelos gráficos — espirales (ver Fig. 1), escaleras, histogramas— de algunas sucesiones infinitas (e.g. $\{1/2^n\}$, $\{1/n\}$ entre otras) y sus series correspondientes.

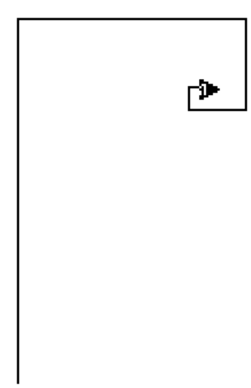

Figura 1: Modelo de espiral correspondiente a la sucesión $\{1/2^n\}$.

[1] Según la definición de *micromundo* dada por Hoyles & Noss, 1987.

Cabe resaltar que un aspecto importante de la manera en que se concibieron estas actividades de programación es que crean la necesidad de coordinar los diferentes sistemas de representación: la representaciones gráficas y numéricas se describen y controlan a través del código simbólico (de programación). El uso de la computadora permitió además observar la evolución temporal de cada proceso, eliminando la limitación de sólo observar el estado final (el resultado) del proceso, como suele ser el caso en las matemáticas escolares tradicionales. Esto permitió a los alumnos investigar el *comportamiento d*e los procesos infinitos estudiados. La observación del comportamiento, como por ejemplo la velocidad de convergencia, demostró ser un aspecto importante para que los alumnos encontraran explicaciones y construyeran significados del porqué algún proceso era convergente o divergente.

Un ejemplo de lo anterior es ilustrado en la manera mediante la cual dos alumnos de preparatoria (Manuel y Jesús) determinaron la divergencia de la serie armónica. Los pasos de su proceso de exploración y descubrimiento fueron los siguientes:

A partir de la observación en el modelo gráfico en espiral (ver Fig. 2) de un "hoyo" en el centro y la tendencia a evitar el centro se llegó a la realización inicial de un comportamiento diferente para la sucesión armónica en comparación a otros casos estudiados.

- análisis matemático de la fórmula les muestra que $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}=0$, i.e., la sucesión armónica converge a cero;
- un regreso al modelo gráfico lleva a los estudiantes a suponer que la convergencia de la sucesión debe ser muy lenta;
- escogen otro modelo gráfico —una escalera (Fig. 3) — y observan como muestra un crecimiento persistente (correspondiente al comportamiento de la serie)

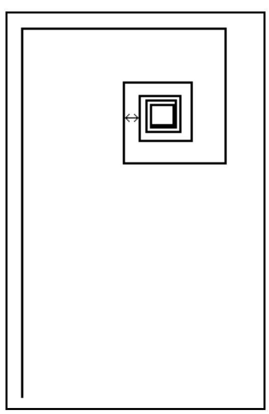

Figura 2: Modelo de espiral para {1/n}.

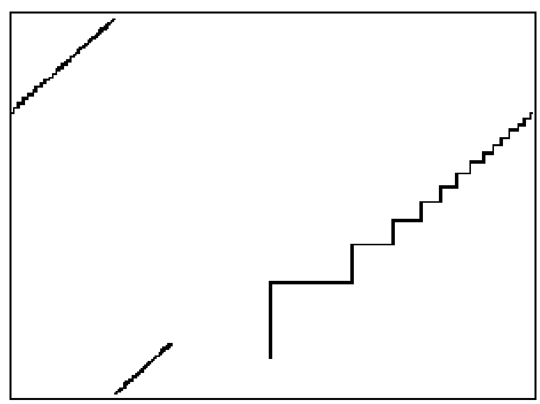

Figura 3: Modelo en escalera ("envolviendo" la pantalla) representando la serie armónica. (Escala más pequeña).

- la búsqueda por explicar el comportamiento observado resalta lo lento del *ritmo* de convergencia de la sucesión armónica (en comparación a otras de las sucesiones estudiadas)
- la observación del histograma de la sucesión (ver Fig. 4) confirma visualmente la lenta convergencia de la sucesión;

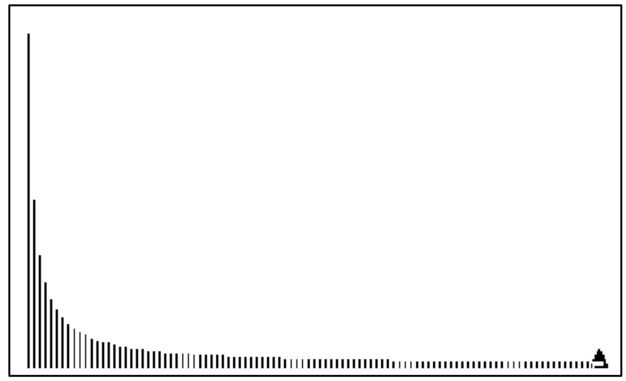

Figura 4: *Modelo en histograma de los primeros 100 términos de la sucesión armónica.*

- .los estudiantes (Manuel y Jesús) predicen el comportamiento del modelo de línea (que ilustra el comportamiento de las series) como uno que se va a extender persistentemente hacia una medida infinita
- Surgen dos explicaciones para la divergencia de la serie:
  - el proceso es infinito: algo siempre se está añadiendo
  - la lenta convergencia de la sucesión
- Surge un conflicto al percatarse de que (i) arriba siempre es cierto, aún en casos de series convergentes. Nueva duda al poner la atención en la idea de que cuando N es muy grande el crecimiento es muy pequeño, casi insignificante, y por lo tanto parecería poco probable que la serie tenga un valor infinito.
- Sin embargo, un análisis numérico estructurado, mediante tablas de valores (ver tablas 1 y 2), apunta hacia la ausencia de un límite para la serie.
- Este análisis es complementado por el modelo en histograma de las sumas parciales (ver Fig. 5). Los estudiantes se convencen de la lenta divergencia de las series que explican por la lentitud de la convergencia de la sucesión.

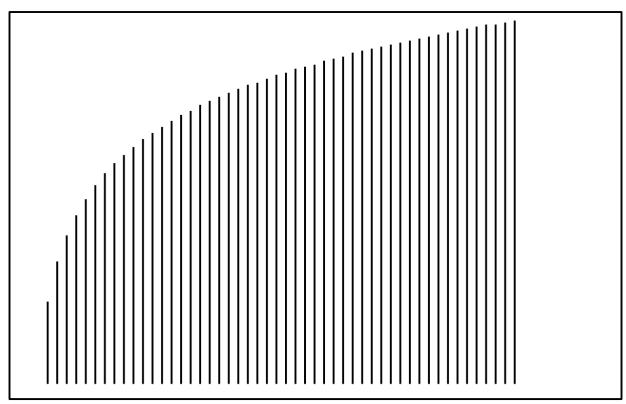

Figura 5: Histograma de las sumas parciales de la serie armónica. (Diferente escala que la de la Fig. 4).

100	5.555555556	2.666666666	1.724137931	1.265822785
66.66666666	5.405405406	2.631578948	1.709401709	1.257861635
50	5.263157894	2.597402598	1.694915254	1.25
40	5.128205128	2.564102564	1.680672269	1.242236025
33.33333334	5	2.53164557	1.666666667	1.234567901
28.57142858	----------------------	2.5	1.652892562	1.226993865
25	4.87804878	2.469135802	1.639344262	1.219512195
22.22222222	4.761904762	2.43902439	1.62601626	1.212121212
20	4.65116279	2.409638554	1.612903226	1.204819277
18.18181818	4.545454546	2.38095238	1.6	1.19760479
16.66666667	4.444444444	2.352941176	1.587301587	1.19047619
15.38461538	4.347826086	2.325581396	1.57480315	1.183431953
14.28571429	4.255319148	2.298850574	1.5625	1.176470588
13.33333333	4.166666666	2.272727272	1.550387597	1.169590643
12.5	4.081632654	2.247191012	1.538461538	1.162790698
----------------------	4	2.222222222	1.526717557	1.156069364
11.76470588	----------------------	2.197802198	1.515151515	1.149425287
11.11111111	3.921568628	2.173913044	1.503759398	1.142857143
----------------------	3.846153846	2.150537634	1.492537313	1.136363636
10.52631579	3.773584906	2.127659574	1.481481481	1.129943503
10	3.703703704	2.105263158	1.470588235	1.123595506
----------------------	3.636363636	2.083333334	1.459854015	1.117318436
9.523809524	3.571428572	2.06185567	1.449275362	1.111111111
9.09090909	3.50877193	2.040816326	1.438848921	1.104972376
----------------------	3.448275862	2.02020202	1.428571429	1.098901099
8.695652174	3.389830508	2	1.418439716	1.092896175
8.333333334	3.333333334	----------------------	1.408450704	1.086956522
8	3.278688524	1.98019802	1.398601399	1.081081081
----------------------	3.225806452	1.960784314	1.388888889	1.075268817
7.692307692	3.174603174	1.941747573	1.379310345	1.069518717
7.407407408	3.125	1.923076923	1.369863014	1.063829787
7.142857142	3.076923076	1.904761905	1.360544218	1.058201058
----------------------	3.03030303	1.886792453	1.351351351	1.052631579
6.896551724	----------------------	1.869158879	1.342281879	1.047120419
6.666666666	2.985074626	1.851851852	1.333333333	1.041666667
6.451612904	2.94117647	1.834862385	1.324503311	1.03626943
6.25	2.898550724	1.818181818	1.315789474	1.030927835
6.06060606	2.857142858	1.801801802	1.307189542	1.025641026
----------------------	2.816901408	1.785714286	1.298701299	1.020408163
5.882352942	2.777777778	1.769911504	1.290322581	1.015228426
5.714285714	2.739726028	1.754385965	1.282051282	1.01010101
	2.702702702	1.739130435	1.27388535	1.005025126
				1

Tabla 1: Salida (simultánea a la graficación de cada barra) de los valores de los primeros 200 segmentos de barra usando una escala de 200. Se observa el aumento en la cantidad de valores en cada rango numérico a medida que progresa la lista; relacionan este comportamiento con la lenta convergencia de la sucesión.

Las exploraciones de la sucesión y serie armónica pusieron en relieve los siguientes aspectos: (i) el *lento* comportamiento de convergencia de la sucesión; (ii) la divergencia de la serie y (iii) el efecto de la *velocidad* de convergencia de la sucesión en el comportamiento de la serie correspondiente.

Es así como los alumnos dedujeron la divergencia de la serie armónica, primero a través de la observación del comportamiento visual, y luego coordinando este elemento visual con el numérico. Los alumnos tuvieron que investigar cómo se relacionaban y coordinaban los elementos para poder resolver las contradicciones intuitivas que surgieron (en particular la aparente paradoja de la convergencia de sucesión y la divergencia de la serie correspondiente). Esto involucró un intenso proceso exploratorio de "ida y vuelta" utilizando todas las herramientas disponibles y sus papeles complementarios: los múltiples modelos gráficos, el análisis de los valores numéricos, como también un análisis de la fórmula matemática. A través de la coordinación de todos estos elementos y de las experiencias, los estudiantes no sólo se convencieron de la divergencia de la serie, sino que también encontraron una explicación para ello en el comportamiento de la sucesión. Este episodio resalta la importancia del estudio del *comportamiento* de una sucesión y de su relación con el comportamiento de su serie correspondiente.

Como señalaron otros alumnos:

Víctor: *Es posible saber más o menos a donde tienden las cosas observando cómo crece o decrece… su comportamiento.*

Alejandra: *A veces vemos un aumento rápido al principio, pero luego observamos que se hace más lento*.

1	4.174559197	4.846921265
1.5	4.201586224	4.860810153
1.833333333	4.227902013	4.874508783
2.083333333	4.253543038	4.888022297
2.283333333	4.278543038	4.90135563
2.45	4.302933282	4.914513525
2.592857143	4.326742807	4.927500538
2.717857143	4.349998621	4.940321051
2.828968254	4.372725893	4.952979279
2.928968254	4.394948115	4.965479279
3.019877345	4.416687246	4.977824958
3.103210678	4.437963842	4.99002008
3.180133755	4.458797175	5.002068273
3.251562326	4.479205338	5.013973035
3.318228993	4.499205338	5.02573774
3.380728993	4.518813181	5.037365648
3.439552522	4.53804395	5.048859901
3.495108078	4.556911875	5.060223537
3.547739657	4.575430394	5.071459492
3.597739657	4.593612212	5.082570603
3.645358705	4.611469355	5.093559614
3.69081325	4.629013214	5.104429179
3.734291511	4.646254594	5.115181867
3.775958178	4.663203746	5.125820166
3.815958178	4.679870413	5.136346481
3.854419716	4.696263855	5.146763148
3.891456753	4.712392887	5.157072427
3.927171039	4.728265903	5.167276509
3.961653798	4.743890903	5.177377519
3.994987131	4.759275519	5.187377519
4.027245196	4.774427034	
4.058495196	4.789352407	
4.088798226	4.80405829	
4.11820999	4.818551043	
4.146781419	4.832836758	

Tabla 2: Lista de los primeros 100 valores de las sumas parciales de la serie armónica.

Referencias:

diSessa, A. (1997), "Open Toolsets: New Ends and New Means in Learning Mathematics and Science with Computers". *Proceedings of PME-21*, Finland; Erkki Pehkonen (Ed.), p.47-62.

Harel, I. & Papert, S. (eds.), (1991), *Constructionism*; Ablex Publishing Corporation, Norwood, NJ.

Hoyles, C. & Noss, R. (1987), "Synthesising mathematical conceptions and their formalisation through the construction of a LOGO-based school mathematics curriculum". *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* 18, 4 (1987), p.581-595.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996), *Windows on Mathematical Meanings. Learning cultures and computers*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Boston, London.