Tratamiento de los conceptos de razón y proporción a través de un programa didáctico

Elena Fabiola Ruiz Ledesma
CECyT Wilfrido Massieu. IPN
efruiz@ipn.mx

Resumen

El presente artículo plantea la importancia de la construcción de los conceptos de razón y proporción a través de una secuencia de enseñanza que fue puesta en práctica con un grupo de estudiantes mexicanos que cursaban el sexto grado de Educación Primaria. Se da una fundamentación teórica acorde con los objetivos de la investigación, hay un tratamiento metodológico que inicia con la observación hasta llegar a las entrevistas, las cuales permiten determinar tres estudios de caso.

En relación al Programa didáctico, la elaboración de las tareas muestran una progresión, iniciando con la revisión de aspectos cualitativos para llegar a lo cuantitativo, tomando a la medición en términos convencionales como no convencionales, como un instrumento que permitiera establecer las relaciones; ya que el programa didáctico apuntó al reconocimiento de las razones como relaciones entre cantidades y de las proporciones como relaciones entre razones.

Introducción

Muchas de las necesidades que presentan los alumnos de secundaria o bachillerato, tienen sus raíces en la escuela elemental. En efecto, hay temas de matemáticas que se introducen en la primaria y dependiendo de la forma como se traten, así como de la construcción que de los conceptos involucrados en ellos se haga, es lo que permite a los estudiantes avanzar hacia la comprensión de conceptos que trabajarán en los siguientes niveles educativos. Este es el caso de **razón y** proporción.

Atendiendo a la falta de estudios previos exclusivamente referidos a la construcción de los conceptos de razón y proporción simple y directa se decidió llevar a cabo un programa de enseñanza de estos tópicos con un grupo de estudiantes que cursaban el sexto grado en la escuela primaria. Dicho programa se desarrolló en tiempos reales y afín con el currículo escolar. Esta propuesta de enseñanza que la autora de este documento elaboró corresponde al sustrato más elemental de razón y proporción, hace un recorrido partiendo de la revisión y el enriquecimiento del pensamiento cualitativo de los alumnos, se hace el tránsito de lo cualitativo a lo cuantitativo hasta llegar a la cuantificación.

El Problema

El problema de investigación consistió en revisar las estrategias que emplean los estudiantes de sexto grado de primaria, al resolver problemas **de razón y proporción simple y directa**, para reconocer los procesos cognitivos del pensamiento de los alumnos y poder determinar cómo estructuran sus respuestas ante situaciones problemáticas. Lo que constituyó la base para el diseño y aplicación de una propuesta de enseñanza de los tópicos señalados, que fuera afín con sus elaboraciones y que se adecuara al currículo escolar.

Para el **reconocimiento de los procesos cognitivos** del pensamiento de los estudiantes de la investigación, fue fundamental revisar las estrategias usadas por ellos, porque permiten recuperar ciertos pasajes del pensamiento que desarrollan al enfrentar tareas de razón y proporción y porque exhiben una gran diversidad de sus recursos[1], así como diferentes modos de representación, como el de la tabla, el del dibujo y el numérico; lo cual es fundamental para el diseño y aplicación de la propuesta de enseñanza.

Cabe señalar que durante la propuesta de enseñanza no se menosprecian los otros procedimientos mencionados por Polya (1984) y demás investigadores, pero es importante enfatizar que el fin de la investigación no fue el trabajo con algoritmos, sino conocer e identificar algunos aspectos cognitivos de los alumnos como pensamientos, estrategias de solución, información perceptual, lenguaje, registros semióticos, entre otros. Porque con el programa didáctico se pretendió que ellos comprendan y usen los términos de razón y proporción simple y directa en distintas situaciones que se les planteen. Asimismo, se intenta desarrollar una metodología adecuada que favorezca el proceso seguido hasta la construcción de dichos conceptos.

Este desarrollo conceptual es común a lo que se dio de forma similar a lo que señala Glasersfeld (1995), que es a través de una aproximación constructivista, la cual requiere de una autorregulación y construcción de estructuras conceptuales a través de la reflexión y abstracción, ya que los problemas no son resueltos por recuperación de datos, o por un aprendizaje automático de respuestas correctas.

> “Tener registrado y encontrado un patrón hacia la meta provee, incomparablemente, más placer y satisfacción, que simplemente haber dicho que uno ha dado la respuesta correcta” (Glasersfeld, 1995).

[1] Tomando la definición de Schoenfeld (1985) los “recursos” representan un inventario de lo que el sujeto sabe, lo que incluye conocimientos, hechos y definiciones básicas, también se contemplan las formas en que estos conocimientos son traídos y manejados por el estudiante al resolver un problema.

Se ve reflejado el carácter constructivista del programa de enseñanza al coincidir con lo dicho por Pérez (1999, p.63):

> "Aunque la ciencia matemática sea una disciplina formal cuyos procedimientos se basan fundamentalmente en métodos deductivos, también es cierto que, como señalan tanto el currículo de Primaria como el de Secundaria, los conocimientos matemáticos son una construcción del propio alumno que tienen sus raíces en la actividad inductiva en la vida cotidiana."

Por esta vía del constructivismo, el propósito del estudio fue hacer un tratamiento didáctico introductorio de razón y proporción simple y directa, promoviendo que el estudiante desarrolle un manejo conceptual de los tópicos señalados.

El fin último de la investigación es que el educando llegara a la construcción de ambos conceptos, considerando a la razón como una relación entre magnitudes y a la proporción como una relación de equivalencia entre razones, según definición dada por Hart, 1988.

Justificación

Existen varias razones por las cuales se decidió llevar a cabo esta investigación, las que se resumen a continuación.

- La no comprensión de los tópicos de razón y proporción contribuyen al mal empleo de conocimientos de la aritmética (manejo de problemas multiplicativos, entre otros) que se trabajan en la escuela primaria, además de que delimita y distorsiona conceptos que se abordan en la secundaria y vocacional, como la variación proporcional, funciones, derivadas, etc.

- La experiencia vivida por la autora de esta investigación, como docente y asesora en los niveles de primaria, secundaria y vocacional, le han permitido constatar que tanto profesores como estudiantes muestran dificultad al resolver situaciones en las que se involucran las nociones de razón y proporción. En parte, se manifiesta al no identificar varias representaciones que pueden usarse al resolver problemas de razón y proporción, como en el caso de no relacionar la representación tabular con la numérica; lo que se refleja en la forma en la que algunos profesores manejan el llenado de las tablas que aparecen en los libros de texto gratuitos de primaria SEP, 1995, ya que no establecen las relaciones tanto internas como externas entre las cantidades, además de que estas relaciones no son vistas como razones. Otra dificultad detectada es con respecto a los métodos de solución que emplea el estudiante al resolver problemas de razón y proporción, como cuando el sujeto tiene que escoger entre usar números naturales o fracciones, la vía por la que se inclina es la primera, evadiendo la manipulación de fracciones.

- La inclusión de los temas razón y proporción al inicio del programa de estudios del curso de Álgebra[2] correspondiente al área de ciencias básicas del nivel medio superior, en particular en los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos, muestra la importancia de abordar estos tópicos de manera clara y enfocada hacia la revisión de la construcción de ambos conceptos, antes de hacer un tratamiento más formal como continuación de lo visto en la secundaria y en la los últimos grados de la primaria.

- Un estudio previo[3] de carácter exploratorio que muestran Ruiz et al. (1997a y 1997b) y Ruiz (1997), donde se trabajó con estudiantes de sexto grado y profesores de los niveles básico y medio, fue indicador de la utilización de la regla de 3 simple como única herramienta para resolver problemas de valor perdido en su resolución, que en el caso de los profesores, el empleo de este algoritmo fue exitoso, no sucediendo lo mismo con los estudiantes, añadiéndose a ello el que no hubo manifestación de entendimiento en su uso. Este estudio previo permitió ver la trascendencia de la instrucción escolar sometida bajo cierta clase de organización escolar, a través del empleo de un algoritmo, en la resolución de problemas de valor perdido. Muestra que si la enseñanza no introduce la regla de tres, ésta no aparece por sí sola.

Tanto profesores como estudiantes redujeron el tratamiento de razones y proporciones a la resolución del tipo de problemas antedichos, a través de la regla de tres. Se pudo constatar, el poco peso que tiene en la enseñanza la elección comprometida acerca de las razones y las proporciones, siendo que a nivel del programa de sexto grado está

[2] Ver en el apéndice 1. Objetivos particulares de la primera unidad del curso de álgebra del programa de estudios del CECyT.

[3] Este estudio previo constituyó exclusivamente una fuente de obtención de información. Los problemas que conformaron la actividad eran muy típicos y dieron lugar al uso de la regla de 3, por lo que fue necesario trabajarlos empleando una guía de preguntas (tomando como antecedente el tema de escala) y la estrategia heurística del *diagrama*.

incluida la variación proporcional simple, en la mayoría de los módulos que lo integran.

- Un estudio realizado por Camarena, P; Rondero C; y Colín, J., (1985) muestra que en los Programas iniciales del ESIME estaba presente la aritmética razonada, más tarde ésta fue sustituida por otra asignatura y estos investigadores consideran que su desaparición del Programa de Estudios establece diferencia entre la formación de los primeros ingenieros egresados de dicha Institución con respecto a los subsecuentes.
Camarena, Rondero y Colín comentan que la aritmética razonada era un curso que permitía a los estudiantes la comprensión de conceptos abordados durante su carrera.

En torno a la vigencia del estudio

Los tópicos de **razón y proporción** son fundamentales dentro de la enseñanza, por ello han sido sometidos a estudio por diversos investigadores de diferentes países y en distintas épocas. En la década de los 80 fueron trabajados fuertemente y antes, con Piaget, pero no por ello han sido agotados.

Actualmente continúa la investigación a nivel internacional como en el caso del estudio realizado en Londres por Mellar (1991), quien presenta modelos sobre sistemas de producción del pensamiento en un grupo de adultos jóvenes al referirse a una tarea del razonamiento proporcional que les fue dada. Este trabajo aportó un punto de vista de cómo se encuentran estudiantes de niveles superiores al trabajar con problemas de proporcionalidad, que por los resultados obtenidos se observa deficiencia en este campo, ya que Mellar encontró que muchos de sus sujetos recurrieron a la suma, de manera incorrecta, como una estrategia que les permitiera llegar a una solución.
El trabajo de Mellar, entonces, invita a continuar abordando estos tópicos con estudiantes de más temprana edad.

Por otra parte, Lesh y Doerr (en prensa) han diseñado y puesto en práctica distintas tareas, entre las que se encuentran algunas de razón y proporción[4]. Estos autores señalan

---

[4] Tarea como la que han titulado "The Big Footprint Problem". Lesh, R. y Doerr, H. M. (en prensa). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching and learning. En: H. M. Doerr y R.

que los estudiantes deben de enfrentarse a resolver problemas significativos a través de hacer descripciones simbólicas de las situaciones que se les presenten, las cuales sean similares a las de la vida real.

En la actualidad, Lesh y Doerr, trabajan, entre otros, los tópicos de razón y proporción, enfocándose a la enseñanza, lo cual es afín al estudio de investigación mostrada aquí. Hay una actividad de estos investigadores que fue empleada en el programa de enseñanza. La tarea se titula “The Big Footprint Problem”[5].

El diseño de la tarea y la manera como Lesh la trabajó resulta muy original, divertida e interesante para los niños y constituye una rica fuente para explotar lo correspondiente a razón y proporción.

Hay otros trabajos como el de Vallejo-Nájera, 1999, que se inspira en tomar las medidas antropométricas como una fuente de relaciones de proporcionalidad. En especial Vallejo-Nájera comenta distintas situaciones en las que establece relaciones entre partes del cuerpo para saber si están en proporción. Ella dice:

> “Los matemáticos y los arquitectos dan bastante importancia a este asunto de las proporciones: Para ellos <<proporción>> es algo parecido a <<equilibrio>>” (1999, p. 47).

También señala que al crecer, el incremento de medidas se dan proporcionalmente.

Szymansky presentó una parte de su investigación en el 29º Simposio de la Sociedad de Piaget (1999). Dicha autora está trabajando, desde hace tres años, todo lo relacionado al desarrollo de la noción de proporcionalidad. Considera a los problemas que implican proporciones simples y múltiples, como parte de las estructuras multiplicativas, entendidas como campo conceptual según Vergnaud (1988), el cual involucra conceptos cuya solución exige que las personas multipliquen o dividan.

Cotret, en 1991 presentó su tesis doctoral, mostrando un estudio sobre el reconocimiento y el tratamiento de la comprensión de problemas de proporcionalidad

---

Lesh (Eds.). *Beyond constructivism: A models and modeling perspective*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[5] Ver apéndice 2, en donde se muestra la tarea “The Big Footprint Problem”.

con estudiantes de 13 y 14 años de edad. Cotret se interesó en analizar los diferentes procedimientos de resolución que los estudiantes utilizan, tanto los homogéneos (tratamiento entre dimensiones de la misma naturaleza) así como los heterogéneos (tratamiento entre dimensiones de naturaleza diferente).

El trabajo de Cotret se relaciona con la presente investigación en cuanto a que en el programa didáctico se pretende que el estudiante use tanto las razones internas como externas, según definición de Freudhental, 1983, lo que en el caso de Cotret equivalen a los procedimientos homogéneos y heterogéneos.

Block, 2001, en su tesis doctoral titulada “La noción de razón en las matemáticas de la primaria” expresó (desde una perspectiva didáctica que destaca el funcionamiento de los saberes en tanto medios implícitos de resolución antes de asumir la forma de conocimientos explícitos) que la noción de razón constituye una herramienta básica en el trabajo que realizan los alumnos de primaria al enfrentar problemas multiplicativos. Block comenta que desde ese punto de vista, la noción de razón se revela, en el aprendizaje, como un antecedente de la noción de número racional, tanto en su función de medida como en la de aplicación lineal.

Del estudio realizado por Block se toman en cuenta, para la investigación que se reporta en este documento, las dificultades provocadas en la enseñanza primaria (manejo de problemas multiplicativos, entre otros) a partir del cambio que se dio a nivel de los programas de Educación Primaria y de la reducción de los tratamientos didácticos de razón y proporción.

Hasta aquí se han mencionado algunos de los investigadores que recientemente han estudiado aspectos relacionados con los tópicos de razón y proporción.

Estudios precedentes en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav

Dado que uno de los propósitos del estudio expuesto en este artículo **es llegar a un reconocimiento de la razón como fracción**, se toma como antecedente varios estudios desarrollados en el Departamento de Matemática Educativa (Figueras, Filloy y Valdemoros, 1985; Ponencia presentada en 1985 ante la Sexta Conferencia

Interamericana de Educación Matemática; 1986; 1987 y Valdemoros, 1988, 1992, 1993a, 1993b, 1994, 1995), los cuales estuvieron centrados en los fundamentos del desarrollo cognitivo de las fracciones y los números racionales, con estudiantes de primaria y secundaria. Algunos de los planteamientos de dichos estudios, se presentan en dos tesis elaboradas en el mismo Departamento, las cuales fueron tomadas en cuenta para la investigación desarrollada en este documento.

En la tesis doctoral de Valdemoros, 1993a, se presentaron situaciones de variación proporcional desde un manejo muy intuitivo, ya que se desarrolló con estudiantes de cuarto grado de primaria; los resultados mostraron que hubo niños que llegaron a respuestas satisfactorias, con un fuerte respaldo en lo perceptual, prescindiendo del uso explícito de razones expresadas en términos de fracciones, por el grado de dificultad que esto representa y que es lo que se pretende con niños de más avanzada edad. Lo que se puede decir es con respecto a la posibilidad de que la noción elemental de razón estaba presente en ellos y que prevaleció el uso del operador multiplicativo. Este planteamiento que podría quedar como una hipótesis, contribuyó a que la autora del presente documento rastreara a través de los procesos cognitivos de los estudiantes de sexto de primaria, lo concerniente a su pensamiento proporcional y así desarrollar una propuesta de enseñanza que partiera de lo cualitativo.

En el Programa de Enseñanza realizado y reportado por Ruiz, 2002 se trabajan las fracciones equivalentes como antesala a la designación del concepto de proporción en términos de la relación de equivalencia entre dos o más razones. Por ello es básico el trabajo de Figueras, 1988, en donde a través de un estudio diagnóstico realizado con estudiantes de primero de secundaria mostró, entre otros aspectos, que al trabajar el reparto proporcional relacionando dos magnitudes, se puede introducir el concepto de equivalencia de fracciones. Figueras comenta:

> "...Subyace en la presentación de esta noción el significado de *fracción como razón:* el numerador es al denominador como la parte es al todo, de manera que, la equivalencia entre dos fracciones, a través de la comparación de cantidades, vía el resultado de un proceso de reparto, se define por medio de la igualdad de dos razones" (1988, p.14).

Objetivos del estudio

A continuación se detallan los objetivos de la investigación, tomando en consideración la manera de abordar el problema señalado y la intención del presente artículo:

Objetivos generales

- Mostrar las estrategias que usa el estudiante al resolver problemas de razón y proporción simple y directa, para poder reconocer componentes cualitativos y cuantitativos del pensamiento ligado a estos tópicos y sus diversos modos de representación.

- Presentar una propuesta de enseñanza que permita recuperar y enriquecer las estrategias empleadas por el estudiante al enfrentar problemas de razón y proporción.

- Llegar a un reconocimiento de la fracción como razón.

Objetivos específicos

- Explorar[6] y enriquecer[7] el pensamiento del estudiante, apoyado en lo perceptual[8] y la experiencia, al enfrentarse a situaciones que se le presenten en forma verbal y escrita, que involucren a las razones y proporciones.
- Explorar y enriquecer el paso de lo cualitativo a lo cuantitativo.
- Indagar, tanto los procesos cognitivos[9] como los procedimientos algorítmicos que el estudiante involucra en la resolución de problemas de razón y proporción.
- Indagar acerca de las dificultades detectables en las estrategias usadas por el estudiante, en particular, la posible emergencia de estrategias aditivas y favorecer el tránsito desde los planteamientos aditivos a los multiplicativos[10].

---

[6] El explorar conduce a indagar e identificar lo que ya está dado en los estudiantes, pero en esa búsqueda no hay una intervención didáctica.

[7] El enriquecer hace alusión a los avances que llegan los alumnos a través de la aportación del proceso de enseñanza que derive de esta propuesta.

[8] Lo perceptual se refiere al dato externo registrado por los sentidos y a la transformación que sufre cuando se integra con el pensamiento.

[9] Se refiere a procesos de pensamiento, procesos simbólicos de representación (del lenguaje natural y técnico, como de otros procesos de representación semiótica).

[10] El hecho de que los estudiantes hagan uso de las estrategias aditivas como un recurso universal, los conduce a que puedan incurrir en errores. La propuesta de enseñanza contemplará el favorecer la reflexión acerca de esto y la generalización de estrategias multiplicativas.

- Diseñar actividades que conduzcan al profesor de primaria y al estudiante hacia una aproximación comprensiva de los conceptos de razón y proporción.
- Desarrollar una propuesta de enseñanza que permita el uso simultáneo de modos diversos de representación, tales como el del dibujo, el de la tabla o el numérico y sus correspondientes enlaces e interacciones.
- Expresar a la razón como fracción.
- Llegar al uso de un lenguaje más técnico[11] a partir del lenguaje común. Estos es, que a través de la enseñanza los estudiantes se aproximen al lenguaje técnico por medio de reglas sintácticas establecidas en el lenguaje aritmético de los números racionales.

A continuación, se muestran otros trabajos que fueron desarrollados con anterioridad a los descritos y de los cuales se recuperaron aspectos que fueron empleados para el diseño y aplicación del programa de enseñanza.

Los autores que se manejan en el marco teórico son en su mayoría constructivistas y los restantes, presentan compatibilidades básicas con el constructivismo, ya que se procuró crear consistencia en la conjunción de lo didáctico con la reflexión matemática acerca de razón y proporción.

Marco Teórico

Algunos investigadores que se incluyen en este marco se enfocaron en todo lo que acompaña a la producción del conocimiento, en las que se exhibe cómo los estudiantes se enfrentan a un problema y lo que piensan en torno a él (es el caso de los trabajos de Piaget, 1978a y b, Piaget e Inhelder, 1972). Otros estudios examinaron la realización o los logros de los estudiantes y el uso de estrategias de solución a problemas sobre

[11] Técnico, ca. "(De lat. Technicus y del gr. arte). Adj. Perteneciente o relativo a las aplicaciones de las ciencias y las artes. 2) Dicho de una palabra o de una expresión empleada exclusivamente y con sentido distinto del vulgar, en el lenguaje propio de un arte, ciencia, oficio, etc." Real Academia Española (2001, p. 2144). Respecto al lenguaje, agregamos las definiciones de Kieren, (1988) distinguiendo un nivel técnico de uno formal. El lenguaje técnico es susceptible de incorporación o utilización de fenómenos concretos. El lenguaje formal hace referencia a un nivel de abstracción o de generalización más avanzado, que puede prescindir de la experiencia y de lo concreto. La expresión lenguaje técnico, en la presente tesis, es aquél que corresponde al manejo no-formal de la aritmética, compuesto por signos acordados universalmente, por ejemplo los signos arábigos articulados entre sí, esto es, combinados entre sí en base a reglas sintácticas fijadas en el lenguaje aritmético.

razonamiento proporcional como lo reportado en Noelting (1980); Karplus, Pulos y Stage (1983 a y b); Hart (1988); Lesh, Post y Behr (1988), etc.

Algunas investigaciones han llegado a ser extendidas a maestros en formación y maestros de la escuela elemental, en servicio.

Otros investigadores como Verganud se interesó en las estructuras aditivas y multiplicativas y en el uso de la tabla para el reconocimiento del operador escalar y el operador función.

Los estudios de Kieren dan un amplio panorama en el trabajo de las fracciones y es él quien señala los distintos subconstructos de la fracción.

Enseguida se muestra con más profundidad las aportaciones al estudio que aborda este artículo hechas por los investigadores señalados

Piaget en el terreno de la proporcionalidad

Piaget (1978a) hizo un seguimiento de las etapas del desarrollo intelectual, hasta llegar a la de las *operaciones formales*, lo que condujo a entender los fundamentos que él encontró en el tratamiento específico de los temas de razón y proporción.

Piaget e Inhelder (1972) señalan que en el estudio de la evolución del pensamiento del niño, con frecuencia encontraron el problema de cómo llegan a ser entendidas las proporciones. En el caso de la velocidad, esta idea se observa en el momento en que dos movimientos sucesivos tienen que ser comparados sobre dos diferentes tiempos y distancias, decir por ejemplo, 5 cm en 1 segundo y 10 cm en 2 segundos. De manera similar, con el juicio de los niños en el caso de la probabilidad, la idea de proporción está directamente implicada, al decir, por ejemplo, 2 casos favorables de un total de 4 casos, como 3 casos favorables de un total de 6 casos. Ambas situaciones no aparecen completamente desarrolladas hasta el nivel de las operaciones formales, pero más tempranamente sí se puede observar que hay proporción en casos más simples, como situaciones que en su laboratorio se abordan a través de la balanza, los vasos comunicantes, las varillas flexionadas, entre otros.

Piaget y las raíces cualitativas del pensamiento proporcional

Piaget (1978b) señala que el sujeto puede construir el esquema de proporcionalidad cualitativa cuando comprende que un incremento en una variable independiente da el mismo resultado que un decremento en la variable dependiente. Es decir, cuando comprende que requiere de un elemento de compensación.

Piaget (1978), a través de sus experimentos realizados, señala que *el niño adquiere la identidad cualitativa antes que la conservación cuantitativa* y hace una distinción entre comparaciones cualitativas y la verdadera cuantificación.

En efecto, para Piaget la noción de proporción empieza siempre de una forma cualitativa y lógica, antes de estructurarse cuantitativamente.

Piaget (1978a) comenta que entre los 11 y los 12 años, se ve en el sujeto la presencia de la noción de las proporciones en diferentes ámbitos, tales como: las proporciones espaciales (figuras semejantes), las relaciones entre pesos y longitudes de los brazos en la balanza, las probabilidades, etc. En el caso de la balanza de barra, el sujeto puede comprender, mediante la manipulación del dispositivo, que es posible conservar el equilibrio teniendo dos pesos iguales a las mismas distancias del centro, pero también se conserva el equilibrio disminuyendo un peso, pero alejándolo y aumentando el otro, aunque aproximándolo al centro. La comprensión de esta proporcionalidad (tanto directa como inversa), se da en primer lugar por vía cualitativa: “es lo mismo aumentar el peso que la distancia” luego en formas métricas simples: “disminuir el peso aumentando la longitud equivale a aumentar el peso disminuyendo la longitud”.

Piaget (1972) describió el avance en el razonamiento que aparece en tanto el niño se aproxima a la adolescencia, como “razonamiento formal” y sus características fueron diferentes a las que especificó como “razonamiento concreto”. Piaget siempre aceptó una lógica de lo concreto, que se ubica en la etapa de las operaciones concretas. El razonamiento proporcional, junto con la habilidad de formular hipótesis y trabajar con un cierto número de variables es indicativo de que el estudiante se encuentra en la etapa del razonamiento formal y que es cuando el sujeto tiene que reflexionar y hacer abstracciones para entender a las razones como relaciones entre cantidades y vincularlas a otras razones. La solución plena de un problema que involucra proporciones exhibe el razonamiento formal, mientras que una solución incompleta muestra el nivel del razonamiento concreto.

De Piaget se rescata para la investigación reportada en este artículo, el reconocimiento de lo cualitativo como lo primero que se da en el sujeto en torno a la proporcionalidad, de ahí que tanto el cuestionario como el diseño de las tareas de enseñanza, inician con actividades que pretenden revisar los componentes cualitativos de las relaciones proporcionales.

También se toma de Piaget lo referente a que el razonamiento proporcional se manifiesta, aproximadamente, en el estudiante de secundaria, por lo que en la investigación reportada aquí –con sujetos de primaria- se hace una indagación inicial de los procesos cognitivos del estudiante en torno a razón y proporción, para que con base en lo que piensa y conoce, se realice la progresión de enseñanza.

Otra de las aportaciones que fue tomada de la teoría de Piaget, en la investigación reportada en este documento, se refiere al criterio de identidad que utilizan los niños como una forma de conservación y esto se ve en las categorías verbales que dieron los estudiantes con los que se trabajó al mencionar como argumento de la reducción, en uno de los modelos de enseñanza referido a Blanca Nieves y los siete enanos, que la cama reducida era más pequeña pero igual ya que no se le quitaba ni se le aumentaba nada.

También, tanto en el cuestionario como en el programa de enseñanza estuvo presente la idea de semejanza de la que nos habla Piaget, pues se recurrió a trabajar con figuras geométricas en distintos partes que integraron el cuestionario así como en diferentes momentos del desarrollo de la propuesta de enseñanza aplicada. Finalmente, los alumnos las llegaron a reconocer como figuras semejantes a aquéllas con las que guardan proporción.

El trabajo de Noelting en torno razón y proporción

Noelting, (1980a y1980b) describió diferencias individuales en la generación de estrategias usando un problema de contexto numérico con una mezcla de jugo de naranja.

En la teoría de Noelting, él encuentra la distinción del tipo de comparación hecha por los sujetos al resolver un problema. Él nota que los sujetos pueden comparar primero las cantidades de jugo de naranja y agua “dentro de” cada recipiente y luego comparan las dos relaciones establecidas; pero también observa que los sujetos pueden comparar primero las dos cantidades de jugo de naranja y las dos cantidades de agua “entre” los recipientes y después comparan estas dos relaciones. La primera forma de proceder la denomina “estrategia dentro de” y la segunda la llama “estrategia entre”.

En la parte I del trabajo realizado por Noelting (1980a), se plantea el problema respecto a la posibilidad de jerarquizar el desarrollo cognitivo, de tal forma que los sistemas de orden superior controlen a los subsistemas de orden inferior.

La investigación que llevó a cabo Noelting, para abordarlo, tomó el caso del *desarrollo del razonamiento proporcional* y el experimento que utilizó en la investigación fue el del *"jugo de naranja"*, que consistió en la comparación de mezclas entre vasos que contienen jugo de naranja y agua. Los reactivos que Noelting propuso tomaron en cuenta todas las posibles variaciones de una situación particular, pretendiendo que el sujeto determinara, a través de ellas, en cuál había mayor concentración de jugo. Formuló 23 reactivos, los cuales variaba de acuerdo al grado de complejidad respecto al concepto de razón. Fueron aplicados a sujetos cuyas edades oscilaban entre 6 y 16 años.

Noelting guarda una proximidad con las ideas de Piaget en lo correspondiente a cómo se presentan y el orden en que aparecen, ya que inicia con lo intuitivo-simbólico que plantea Piaget y continúa hasta culminar con el reconocimiento de las operaciones formales.

Noelting (1980a) comenta que los cambios en el desarrollo son de dos tipos:

i) Cualitativos**,** correspondiendo al uso de nuevas estrategias y requiriendo previo entendimiento de nuevos datos, a través de la reestructuración de la estrategia.

ii) Cambios cuantitativos, permitiendo incrementar la consolidación de una estrategia como es "ejercitada", o aplicando variaciones cuantitativas de los datos.

En la parte II de su trabajo, Noelting (1980b) presentó las diferentes estrategias que emplearon los estudiantes, su descripción y análisis. Al realizar el último, tomó en cuenta simultáneamente la estrategia aplicada por el sujeto y el problema para el cual la utilizó, debido al equilibrio y no equilibrio que se puede dar entre estrategia y problema.

Involucró relaciones de dos períodos de desarrollo:

i) Construcción del concepto de razón.

ii) Construcción del algoritmo del común denominador.

En el problema, una relación "**dentro de**", corresponde a la razón entre el jugo de naranja y el agua en cada bebida y una relación "**entre**" corresponde a la razón, ya sea entre el número de vasos de jugo de naranja en ambas bebidas[12] o entre la cantidad de vasos de agua también en las dos bebidas.

Karplus, Pulos y Stage (1983) señalan que una tarea administrada fue la del "Señor alto y el señor bajo" en la cual los sujetos respondieron explicando cómo habían encontrado la altura del señor alto (que es lo que se pedía en el problema); usando los datos: altura del señor alto y bajo dada en botones (6 y 4 botones respectivamente) y la altura del señor bajo medida con clips para papel que era de 6. Los diversos razonamientos empleados por los sujetos fueron agrupados en 4 categorías: En una de ellas los estudiantes no usaron el dato dado, en otra emplearon relaciones aditivas, en una tercera emplearon gráficas y en la cuarta categoría usaron igualdad de razones. Una fracción pequeña de estudiantes, entre 14 y 17 años de edad, usó proporciones.

Karplus (1983) sugiere, con base en la información obtenida, que el razonamiento aditivo no subyace en una secuencia invariante de desarrollo, sino que está fuertemente influenciada por la instrucción y representa un esfuerzo de los estudiantes para abordar una tarea de un modo adecuado, más que de una manera sistemática.

Estudios sobre proporcionalidad realizados por Hart

Hart encontró que la mayoría de los estudiantes consideró difícil el resolver problemas matemáticos que involucran proporción. Aún así, hay evidencia de que los estudiantes de menor edad y los alumnos de la secundaria con menos éxito, tienen un sentido de lo que "se ve correcto" o lo que "parece ser una distorsión". Un gran número de alumnos resolvieron los problemas de proporción, primordialmente, a través de métodos aditivos sin la implementación de la multiplicación. La investigadora enfatizó los métodos en los que los estudiantes evadieron la manipulación de las fracciones.

Una estrategia que Hart detectó y que la usaron varios de sus estudiantes fue la *estrategia aditiva incorrecta*[13], en la cual es sumada una cantidad fija que no se adecúa al modelo de la multiplicación como suma repetida, para efectuar una ampliación. El estudio longitudinal del CSMS, agregó fundamento al punto de vista de que los niños no salen de la estrategia aditiva incorrecta con el incremento de edad. En tres pruebas, en el transcurso de los años, los sumadores fueron consistentes en el uso de esta estrategia.

[12] Las definiciones de las relaciones "dentro de" y "entre" fueron apoyadas en la interpretación que hace Karplus (1983) acerca de la aportación de Noelting.

[13] Fue descrita previamente por Piaget y Karplus.

Hart comenta que a menudo los problemas de proporción requieren el reconocimiento de un factor escalar fraccional, seguido de una multiplicación por el factor, por lo que considera que la comprensión de las fracciones y las proporciones están vinculadas.

A los ojos de la autora del presente documento se observa que el trabajo realizado por Hart, enfatiza la gran importancia que tiene el desarrollo del pensamiento proporcional en los terrenos de la enseñanza y del aprendizaje, como una forma de evaluación de ellos. Es decir, a Hart le interesa: ¿Cómo aprende el sujeto? ¿Qué piensa? Esto no como parte de un proceso evolutivo (como lo fue para Piaget), sino como parte de un proceso que guarda estrecha relación con la enseñanza. Hart señala que el pensamiento proporcional está presente en el adolescente y que la consumación de lo más avanzado se da una vez que ha construido determinados conceptos.

Para Hart, algunos niveles de generalización como: manejo de razones, modos de generar equivalencias, entre otros, se dan cuando las estrategias multiplicativas son usadas. Y en relación a esto, le presta mucha atención al hecho de que si en la enseñanza se empieza por lo aditivo, se pueden generar dificultades que repercuten en la maduración que el sujeto pudiera llegar a presentar para la utilización de la multiplicación como antecedente de la equivalencia.
Hasta ahora se puede ver que
Bezuk (1989) reporta un estudio realizado con maestros en servicio, principalmente con maestros de la escuela elemental, en formación.
El objetivo de su investigación consistió en examinar la calidad de comprensión que muestran estos maestros respecto al razonamiento proporcional y en relación a las estrategias de solución, incluyendo su habilidad para explicar estas estrategias conceptualmente (el por qué del trabajo), así como revisar el procedimiento seguido (el cómo del trabajo).

No sólo importaba conocer las estrategias que utilizaban en la resolución de los problemas sino la forma en cómo llevaban a cabo la enseñanza del concepto con sus estudiantes. Es muy importante señalar que los maestros del estudio realizado por Bezuk, consideraron como únicos problemas en donde se aplica el razonamiento proporcional, a aquéllos clasificados como “problemas del valor perdido”, es decir, conocidos tres valores determinar el cuarto.

La mayoría de los maestros del estudio de Bezuk, coincidió en que el método de “la razón unidad o unitaria” es uno de los mejores para ser enseñado, argumentando, entre otras cosas, que es fácil de entender y que le permite al estudiante hacer una reflexión del procedimiento seguido para resolver algunos problemas. Respecto al método del “algoritmo de la multiplicación cruzada” la mayoría comentó que era un procedimiento mecánico y que no podían justificar el por qué se realiza el producto en cruz, es decir, no sabían el sentido de ese proceder. En relación a la estrategia aditiva, todos los maestros coincidieron en señalar que era una estrategia incorrecta cuando los sujetos sumaban una cantidad que no correspondía al modelo de la multiplicación, como una suma abreviada. Los maestros no pudieron explicar el por qué de ello.

Bezuk, después de realizar su estudio comenta sus observaciones y propone un programa de educación para los maestros.

i) La mayoría de los maestros que formaron parte del estudio fueron incapaces de explicar el significado del algoritmo de la multiplicación en cruz y el ser fuertemente utilizado por los maestros en la resolución de problemas de razonamiento proporcional.

ii) Pocos maestros del estudio tenían una vaga idea de la relación que tiene el algoritmo de la multiplicación cruzada con las fracciones equivalentes y con el álgebra.

iii) Hay un reconocimiento por parte de los maestros, en cuanto a la necesidad que tienen de contar con más elementos que les permitan profundizar el aspecto del razonamiento proporcional.

Por todo lo anterior, Bezuk concluye que es necesario que los programas de educación para los maestros en formación se centren en el desarrollo del entendimiento del razonamiento proporcional así como en otros conceptos relacionados.

Nesher y Sukenik (1989) hacen un breve recorrido por estudios previos en torno a los conceptos de razón y proporción y señalan que en la mayoría de ellos se han manipulado una o más de las siguientes variables: i) El contexto del problema; ii) los valores numéricos que aparecen en el problema y, iii) el tipo de tarea (comparación o valor perdido). Estos autores comentan que el procedimiento más usual seguido en muchos estudios, consistió en la administración de un test que contenía problemas de razón (dado con o sin ilustraciones; presentado en forma escrita u oral) y en analizar las respuestas de los sujetos en términos de las estrategias usadas para resolver estos problemas. Señalan que uno de los errores dominantes en las estrategias usadas por niños de diferentes edades, es la estrategia aditiva, en donde la relación de las razones es

vista como la diferencia entre términos, en lugar de comprender que es de carácter multiplicativo.
Es de gran interés para la investigación que se reporta en este documento la revisión del isomorfismo de medida, por los esquemas que se manejan y que representan las relaciones entre las cantidades en juego, en un problema de razón o proporción.
"El isomorfismo de medidas es una estructura que consiste de una proporción directa simple entre dos medidas-espacios M_1 y $M_{2.}$ Esto describe un gran número de situaciones de la vida ordinaria y tecnológica" (Vergnaud, 1983, p.129).
Esta estructura o forma de relación multiplicativa, "es una relación cuaternaria entre cuatro cantidades; dos cantidades son medidas de un cierto tipo y las otras dos son medidas de otro tipo" (Vergnaud, 1991, p.197).

Vergnaud (1983 y 1991) utiliza el esquema de la tabla para mostrar las cuatro cantidades que se ponen en relación en los problemas que corresponden a esta estructura multiplicativa (isomorfismo de medidas), designando a "x" como la cantidad buscada. Este esquema lo utiliza en todos los ejemplos con los que trabaja y no es otra cosa que la tabla de correspondencia entre dos tipos de medidas. Por ejemplo: 1) paquetes de yogur en una columna y cantidad de yogures por paquete, en la segunda columna 2) metros de tela y el precio pagado por cada metro, 3) número de pasteles y costo por pastel, etc.
Existen de hecho dos procedimientos para encontrar "x". El primero consiste en aplicar un operador sin dimensión (al que llama "operador escalar") a una cantidad, el cual puede ser un número que multiplica y/o divide a la otra cantidad que corresponde a la misma unidad de medida. El segundo procedimiento consiste en aplicar el operador función (que es expresado como una razón), a una cantidad. En este caso el operador función expresa el pasaje de una categoría de medida a la otra, por lo que es necesario utilizar una forma verbal que exprese la relación.

Se ubica la problemática específica de razón y proporción, al trabajar los significados de Kieren (1983, 1984, 1985) respecto a los números fraccionarios como cuatro subsistemas o subconstructos de la fracción, de los cuales se recuperan aquí los dos que guardan relación con la presente investigación; esto es, razón (planteada en términos intuitivos) y operador multiplicativo.

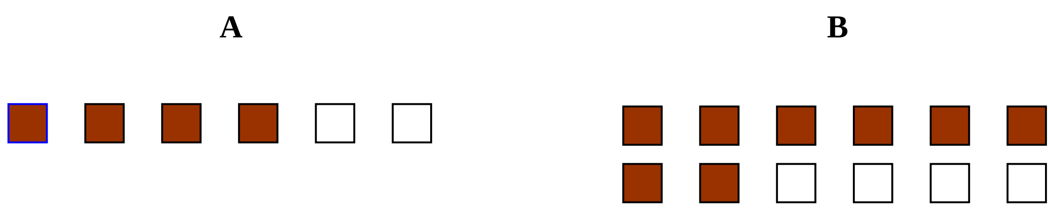
Kieren (1983) propuso dos tipos de herramientas o mecanismos mentales: *constructivos y de desarrollo*. Pese a que no es sencillo determinar la frontera entre ellos, Kieren consideró que los del segundo tipo son más generales y están vinculados a la madurez mental, mientras que los del primer término son más específicos, relacionados con la experiencia y la enseñanza. También comenta que en la actualidad existe una discusión amplia de tales mecanismos vinculada con el desarrollo de las ideas relacionadas con los números naturales, en donde en esta área se puede describir a los mecanismos de la conservación del número, la compensación, la identidad o la reversibilidad como aspectos relacionados con el desarrollo. El mecanismo constructivo primario fundamental de los naturales es claramente *el conteo.* Otros mecanismos constructivos son aquellos relacionados con la numeración y el uso del lenguaje asociado a ésa. En tanto ocurre esto con los naturales, en los racionales interesa lo relacionado a los mecanismos de partición y de equivalencia que Kieren señala como mecanismos constructivos usados en el desarrollo de los 4 subconstructos del número racional, a los que se hizo referencia con anterioridad, tanto intuitivo o informal, así como de un conocimiento más formal del número racional.

Por la relación que guarda la investigación doctoral con respecto a la idea de proporción, se hará mención del mecanismo de equivalencia que muestra Kieren (1983). Nos dice que la relación entre la equivalencia y el número racional es bien conocida desde un punto de vista formal (que al parecer dominaba en esos años en algunos de los currícula sobre fracciones y números racionales). En un sentido informal, la comprensión de la equivalencia es uno de los fundamentos para los conceptos de número racional o fraccionario para varios de los subconstructos. Por ejemplo, si se considera 2/3 como un operador, subyace un concepto de equivalencia (proporcional) cuando un niño se da cuenta que este operador se obtiene de 8/12 o 10/15, o 20/30. En segundo lugar, la equivalencia surge en el sentido de identidad o de “lo mismo” cuando el niño nota que los operadores “2 para 3” y “4 para 6” hacen los mismo, o generan el mismo elemento en la imagen, dado un elemento en el dominio.
En un nivel de madurez, el concepto de equivalencia de un niño es de naturaleza multiplicativa y relacionado íntimamente con el razonamiento proporcional. Empero, hay también nociones de equivalencia menos formales, pero poderosas para los niños o jóvenes que están desarrollando ideas sobre los números racionales. Quizá la primera de

ésas es una extensión de la equivalencia cuantitativa. En este caso, el niño se da cuenta que ½ es lo mismo que 2/4, en el sentido de que “poniendo ¼ con ¼, se forma ½”.

En Kieren (1984), se muestra una apropiación crítica de las ideas de Dienes, dado que para el primero la fracción no sólo debe ser vista como un operador. Dienes daba un sentido más amplio de los operadores.

Kieren comenta que la propia relación entre el numerador y el denominador es de tipo multiplicativo. Muestra algunos ítems del Test del Pensamiento del Número Racional (RNTT), que aplicó a niños de 7, 8 y 9 años de edad. Esta herramienta consistió de 4 partes cada una de las cuales consideraba a los números fraccionarios (racionales no negativos) en forma diferente: como razón, como cociente, como operador multiplicativo y como representación de particiones.
Kieren trabajó a la razón utilizando el problema de la mezcla de la bebida de chocolate para determinar en cuál de ellas el sabor de chocolate era más fuerte.
En el Test, el reactivo consistió en mostrar con figuras cómo estaban constituidas las mezclas para que el estudiante pudiera decidir en cuál de ellas el chocolate estaba más concentrado.



La manera en que Kieren trabajó a la fracción como operador multiplicativo fue a través de la idea de la máquina registradora, en donde se conoce la cantidad de piezas que entran y algunas de las respectivas cantidades de paquetes que salen, pero se desconocen otras. La finalidad es determinar la fracción por la que se debe multiplicar el número de objetos que entran para obtener el número de paquetes que salen.

Kieren observó en las respuestas del test aplicado, que los estudiantes frecuentemente usaban dibujos y un lenguaje informal para describir y responder a las preguntas.

Freudenthal: Razones internas y razones externas

Freudenthal, 1983, designa a las razones como entidades numéricas vinculadas a las proporciones y hace referencia al estatuto lógico de razón como una función de pares ordenados de números o valores de magnitud, marco en el que tienen una relación de equivalencia.

Para Freudenthal, en la enseñanza es preciso tomar en cuenta a las razones internas y a las razones externas, definiendo a las primeras como relaciones establecidas entre distintos valores de la misma magnitud y a las segundas, como relaciones entre valores de diferentes magnitudes.

Esto último es fundamental para la secuencia de enseñanza que forma parte de la investigación doctoral, ya que algunas de las tareas van encaminadas al reconocimiento tanto de las razones internas como de las externas.

El haber revisado los procesos cognitivos, así como las estrategias empleadas por los estudiantes de los estudios a los que se ha hecho referencia es de gran peso para la sustentación de la investigación reportada en el presente artículo, pero también es fundamental la fuerza que cobra la enseñanza en esta investigación, de ahí la necesidad de revisar el soporte que le da la Psicopedagogía y la Didáctica a la progresión de enseñanza que se hizo con los estudiantes de sexto grado.

Las ideas de Freudenthal (1983) suministran una parte considerable de los significados de la teoría realista de las matemáticas, sobre esta teoría Streefland señala que la matematización de la realidad es el aspecto final de las matemáticas. En el uso, la Matemática Realista es una estructura teórica, fruto de la reflexión respecto a los procesos de aprendizaje y de enseñanza.

Se hace referencia a la didáctica de la matemática como la actividad fundamental para la enseñanza de razón y proporción, así como la importancia que tienen las herramientas didácticas desarrolladas por el diseñador y sobre esto, se menciona la Fenomenología Didáctica de Freundenthal junto con otros antecedentes considerados para la construcción realista de las matemáticas.

Streefland recupera las definiciones de Freudenthal sobre razones internas y externas, en donde Freudenthal (1983) señala y Streefland (1993) ratifica que la distinción entre los dos tipos de razones se debe, originalmente, a dos diferentes tipos de procesos cognitivos en el sujeto:

1) Asimilación de elementos similares, con variaciones de un elemento de un tipo particular.

2) Relación entre diferentes elementos, con la construcción de un nuevo concepto: ${}_{a}R_{b}$, ${}_{c}R_{d}$.

Por otra parte, como Coll (1995) dice, los esquemas de conocimiento que el alumno activa ante una nueva situación de aprendizaje constituyen su característica individual más importante en esta situación y tienen una dinámica interna que la intervención pedagógica no puede ignorar ni tratar de sustituir. La ayuda pedagógica consiste en crear condiciones adecuadas para que se produzca esta dinámica interna y para orientarla en la dirección que se pretende, en este caso, con la propuesta de enseñanza hay una fuerte intención hacia la construcción de los conceptos de razón y proporción simple y directa.

Hasta aquí, todo lo señalado como parte de los aspectos teóricos del presente artículo, plantea la relevancia de razón y proporción como objetos de investigación. Los trabajos mostrados por los autores de los estudios a los que se ha hecho referencia, permitieron crear un diseño de enseñanza con un enfoque constructivista, para lograr uno de los objetivos que está inmerso en el planteamiento del problema aquí descrito.

Institución Educativa y los sujetos de la Investigación

El estudio tuvo lugar en un escenario natural, con un grupo de 29 estudiantes de sexto grado de Educación Primaria perteneciente a una escuela de la Secretaría de Educación Pública de turno matutino, la cual fue elegida porque presentaba rasgos comunes a un amplio espectro de escuelas urbanas. Está ubicada en una zona de la ciudad de México, dinámica y en continuo crecimiento pero de un estatus socioeconómico bajo.

Se considera que el grupo de alumnos era heterogéneo porque no todos los niños mostraban el mismo nivel de comprensión, había estudiantes un poco rezagados, mientras que otros se percibían como más dispuestos a la enseñanza.

Este grupo fue elegido, de entre los cuatro existentes en la escuela, porque la profesora titular aún no había trabajado los temas de razón y proporción, lo cual permitiría a la investigadora abordarlos desde el terreno cualitativo, como así esta planteado en los objetivos del estudio, sin verse influenciado el programa de enseñanza por un tratamiento reciente de ellos.

Acerca de la secuencia de los instrumentos

Para poder llevar a cabo el estudio se requirió del uso de distintos instrumentos metodológicos, los cuales fueron diseñados con la finalidad de cumplir con lo planteado en los objetivos previamente descritos. La progresión de su diseño se muestra a continuación:

Primeramente, se realizaron observaciones directas en el aula, poniendo énfasis en la participación de los alumnos en el salón de clase y en la forma en que el profesor abordó el proceso de enseñanza al trabajar con distintas actividades, algunas de ellas próximas al tema de razón y proporción, lo que permitió reconocer la naturaleza de la enseñanza que el maestro promovió. Luego, tuvieron lugar las observaciones indirectas de las actividades desarrolladas por los alumnos en sus cuadernos. Posterior a las observaciones, se aplicó un cuestionario diagnóstico con la finalidad de tener un acercamiento a los alumnos, en cuanto a su forma de trabajar al enfrentarse a problemas de razón y proporción. Se continuó llevando a cabo una serie de sesiones en las que se aplicaron problemas de razón y proporción simple y directa para que fueran resueltos por los estudiantes, siendo la investigadora observada por personas involucradas en el campo de la matemática educativa, con el interés de confrontar las situaciones vividas por los alumnos en dicho marco. Una vez concluidas las sesiones de trabajo se aplicó por segunda ocasión el cuestionario, el mismo que habían resuelto antes de la experiencia de enseñanza, pero el tiempo transcurrido entre una aplicación y otra fue de ocho meses, por lo que no cabe la posibilidad de que hubiera influencia en las respuestas del segundo. La finalidad de este cuestionario, al que se le denominó final, fue el reconocer avances logrados por los estudiantes y evaluar la propuesta de enseñanza que la investigadora puso en marcha.

Por último, se realizaron entrevistas, del tipo “semi-estructuradas”, las cuales evaluaron el programa didáctico y también tuvieron un carácter de retroalimentación (Valdemoros, 1997 y 1998).

La elección de esta secuencia obedece a que la investigación requirió de la indagación de algunos procesos cognitivos de los alumnos (pensamientos, estrategias de solución, información perceptual, lenguaje, registros semióticos, entre otros) para desarrollar una propuesta de enseñanza, acorde con las elaboraciones de los alumnos y que fuera afín con el programa oficial de la SEP (1983). De esta forma se manifestaron dos fases, interconectadas entre sí, de la progresión de los instrumentos metodológicos. Una primera, lo fue la fase de exploración, esto es, indagación y búsqueda de los conocimientos que el estudiante tenía, la cual fue realizada a través de las observaciones directas e indirectas y del cuestionario inicial, aunque también el programa didáctico llevado a cabo, permitió obtener más información acerca de los procesos cognitivos del estudiante, antedichos; lo que condujo a la inclusión de actividades complementarias para reafirmar conocimientos elementales que demandaba el alumno.

Por lo que respecta a la segunda fase que fue la de enriquecimiento, ésta tuvo lugar con la propuesta de enseñanza y las entrevistas.

Tanto la observación como los cuestionarios, arrojaron luz para diseñar la propuesta de enseñanza, la cual fue constructivista-didáctica; ésta permitió que los estudiantes dieran sentido y significado[14] a las nociones de razón y proporción, partiendo de profundizar en torno a los aspectos cualitativos de su pensamiento y haciendo el tránsito a la cuantificación.

Cuestionario Inicial: Diseño, prueba, ajuste y formas de validación

A continuación se muestran los propósitos generales del cuestionario, propósitos específicos de cada bloque, así como los propósitos de cada tarea.

Tabla 1. Propósitos del Cuestionario Inicial

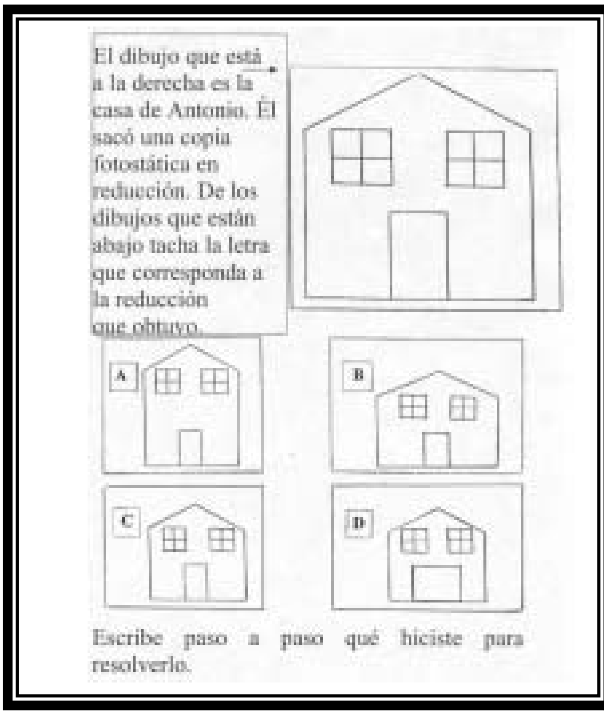
	Cuestionario (Bloques I y II)
Propósitos	1. Determinar el estado en que se encuentra el sujeto en torno a la organización que tienen los componentes cualitativos y procesos de cuantificación de las relaciones proporcionales. 2. Realizar una indagación profunda que permita mostrar tanto lo que el

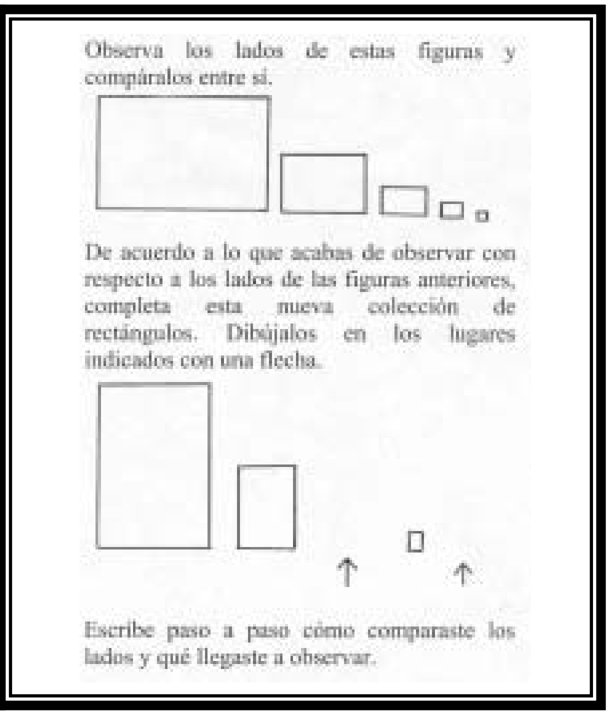
[14] El *significado* es una "entrada de diccionario" y "una categoría semántica universal" (según Benveniste, 1971). Es considerado como un conjunto de rasgos distintivos, es decir, como el sistema de rasgos retenidos por la lengua para reconocer cierto tipo de objetos entre todos los seres de la realidad" (Ducrot y Todorov,1998, p.288). El *sentido,* para Benveniste, es un contenido semántico que se asocia a construcciones particulares del lenguaje, no conforma categorías universales y suele estar muy en relación con los modos específicos de articulación de los mismos. Además, no hay una secuencia cronológica entre sentido y significado. Son distintos componentes semánticos que se complementan.

Generales	estudiante exhibe como lo que deja insinuado. 3. Recuperar la secuencia del pensamiento del estudiante. 4. Evidenciar la manera como el estudiante se acerca a la solución de los problemas planteados, tanto las estrategias que utiliza en la resolución como los modos de representación con los que trabaja.	
Propósito Específico de Cada bloque	Bloque I Indagar tanto los conocimientos como el saber matemático que tiene el estudiante sobre los componentes cualitativos y aspectos elementales de lo cuantitativo, en las relaciones proporcionales.	Bloque II Indagar cómo el estudiante está procesando su pensamiento en torno a la cuantificación de las relaciones proporcionales.
Propósito de cada Tarea	1. Indagar si el estudiante puede reconocer la reducción de un dibujo en todos sus componentes, de tal manera que pueda expresar si se conserva la forma original del dibujo, con base en discriminaciones visuales. 2. Indagar si el estudiante reconoce visualmente la razón en la que se encuentran las dimensiones de los rectángulos y si el niño puede dibujar los faltantes, apoyándose en el reconocimiento que hizo. 3. Indagar si el estudiante puede reproducir una figura a una escala dada (se solicitó que el dibujo que reprodujera fuera el doble del original). 4. Indagar si el estudiante puede completar una figura, que es la reducción de la original, de tal manera que preserve la proporcionalidad o que conserve la forma de la figura original, de qué estrategia se valió y qué modo de representación usó al realizar la tarea. 5. Indagar si el estudiante puede completar la ampliación de una figura preservando la proporcionalidad y que explique por escrito cómo lo hizo.	6a. Indagar si el estudiante puede completar una figura geométrica, conociendo el valor del segmento que representa al ancho de ella y los valores del alto y ancho de la figura que se pretende que sea proporcional a otra figura dada, y qué estrategia emplea. La tarea estuvo inmersa en una relación de semejanza. Revisar si relaciona magnitudes de una misma escala (razones internas). 6b. Indagar si el estudiante puede completar una figura geométrica, conociendo el valor del segmento que representa al ancho de ella y los valores del alto y ancho de la figura que se pretende que sea proporcional a otra figura dada, y qué estrategia emplea. La tarea estuvo inmersa en una relación de semejanza. Revisar si relaciona magnitudes de escalas diferentes (razones externas). 7a y 7b. Determinar las cantidades que corresponden a los datos dados en tabla. Los datos son el resultado de una situación planteada. Revisar la estrategia que empleó en su llenado y si estableció relación entre las preguntas formuladas y la tabla. 8. Dada una tarea ilustrada a través

		de dibujos (botes de pintura), completar los datos faltantes conocidos tres valores y revisar qué estrategia emplea. 9. Determinar el valor desconocido de un problema, apoyado en el modelo de la compra de objetos conocidos por el estudiante (bolsas de dulce), dados 3 datos. Revisar qué estrategia emplea. 10a y 10b. Indagar si el estudiante puede inventar un problema relacionado con tres cantidades dadas en una tabla. Revisar si puede llenarla y resolver el problema que él haya planteado.

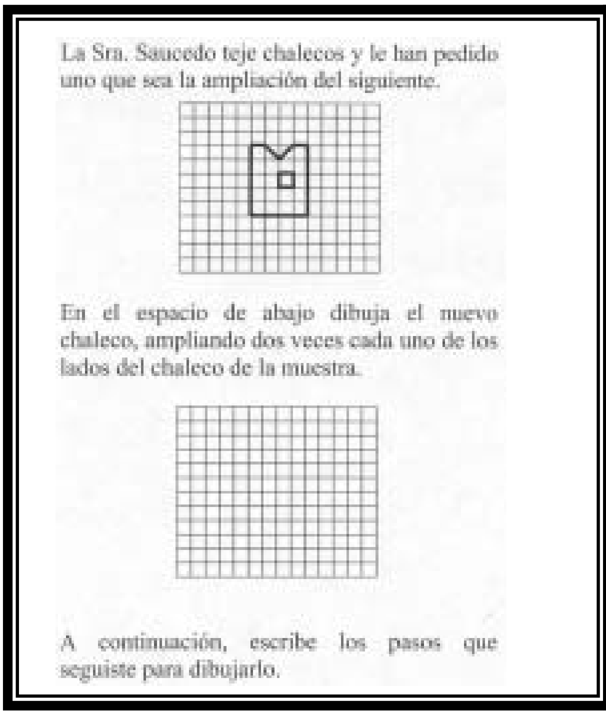
A continuación se muestran las tareas que integraron el cuestionario inicial. Las dos primeras exploraron los aspectos cualitativos en el terreno de la proporcionalidad.





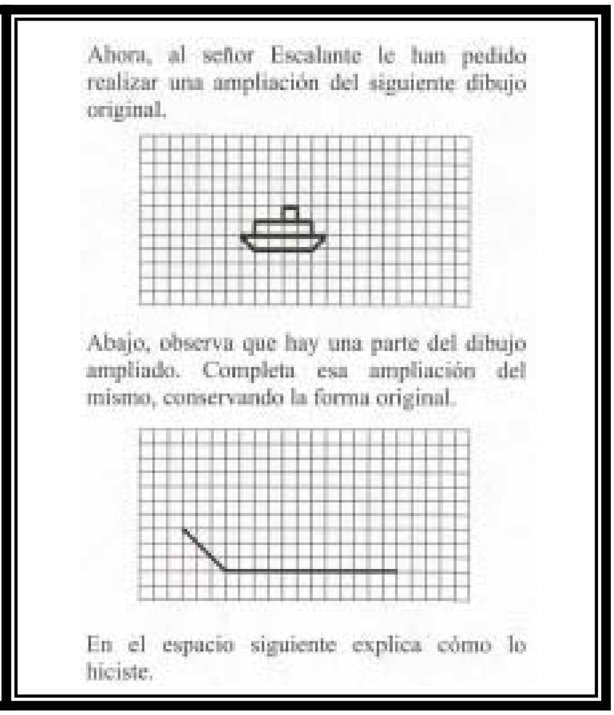
Tarea 1 **Tarea 2**

Las tres siguientes estuvieron enfocadas al tránsito de lo cualitativo a lo cuantitativo:


La Sra. Saucedo teje chalecos y le han pedido uno que sea la ampliación del siguiente.

En el espacio de abajo dibuja el nuevo chaleco, ampliando dos veces cada uno de los lados del chaleco de la muestra.

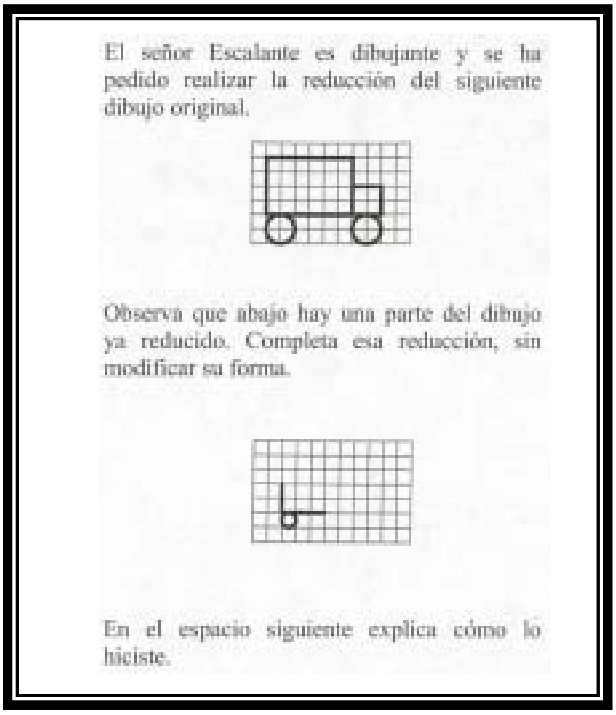
A continuación, escribe los pasos que seguiste para dibujarlo.


Ahora, al señor Escalante le han pedido realizar una ampliación del siguiente dibujo original.

Abajo, observa que hay una parte del dibujo ampliado. Completa esa ampliación del mismo, conservando la forma original.

En el espacio siguiente explica cómo lo hiciste.

Tarea 3 **Tarea 4**


El señor Escalante es dibujante y se ha pedido realizar la reducción del siguiente dibujo original.

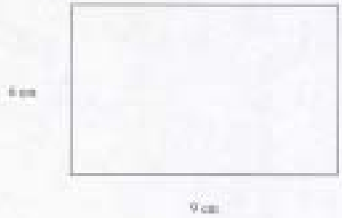
Observa que abajo hay una parte del dibujo ya reducido. Completa esa reducción, sin modificar su forma.

En el espacio siguiente explica cómo lo hiciste.

Tarea 5

Las ocho tareas restantes del cuestionario se centraron en el campo cuantitativo del pensamiento del estudiante.

Un carpintero cortó una tabla de madera con forma rectangular, de 9 cm de largo y 6 cm de ancho. Necesita cortar otra tabla que tenga la misma forma que la primera pero de medidas diferentes. Si de largo debe medir 3 cm ¿cuánto debe medir de ancho la segunda tabla? _______ cm.



Completa la figura que representa la segunda tabla de madera.

3 cm

Paso a paso, explica cómo lo resolviste.

Tarea 6a

Un carpintero cortó una tabla de madera con forma rectangular, de 12 cm de largo y 6 cm de ancho. Necesita cortar otra tabla que tenga la misma forma que la primera pero de medidas diferentes. Si de largo debe medir 5 cm ¿cuánto debe medir de ancho la segunda tabla? __________ cm.

Completa la figura que representa la segunda tabla de madera.

5 cm

Paso a paso, explica cómo lo resolviste.

Tarea 6b

Lee y completa.

La Sra. Saucedo va a tener invitados a merendar y pensó hacer chocolate con leche. Ayúdala a saber cuántas barras de chocolate necesita para 2 litros de leche _______ y cuántas para 5 litros de leche ___________.

También ayúdala a saber cuántos litros de leche debe comprar para 6 barras de chocolate: ___________ litros.

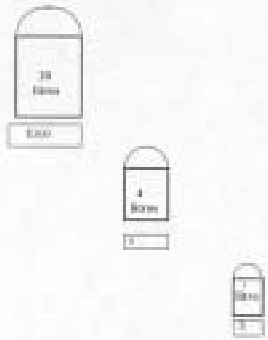
Auxíliate, llenando la siguiente tabla.

Barras de chocolate	Litros de leche
2	1
	2
6	
	5

Explica qué hiciste para contestar las preguntas.

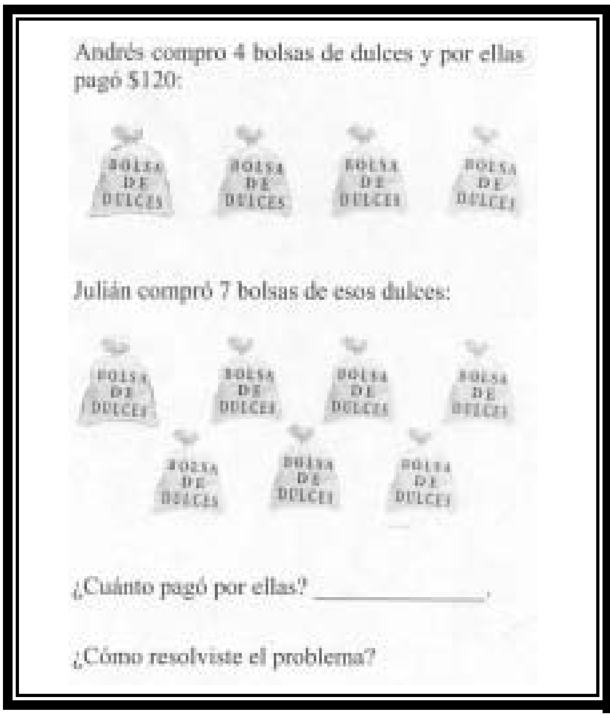
Tareas 7a y 7b

Luis va a ayudar a su papá a pintar la casa y necesitan varios botes de pintura. Ellos saben que 20 litros cuestan 300 pesos. Ayúdalos a calcular el precio de los otros botes requeridos. Completa:



En el espacio siguiente escribe qué es lo que hiciste para resolverlo.

Tarea 8

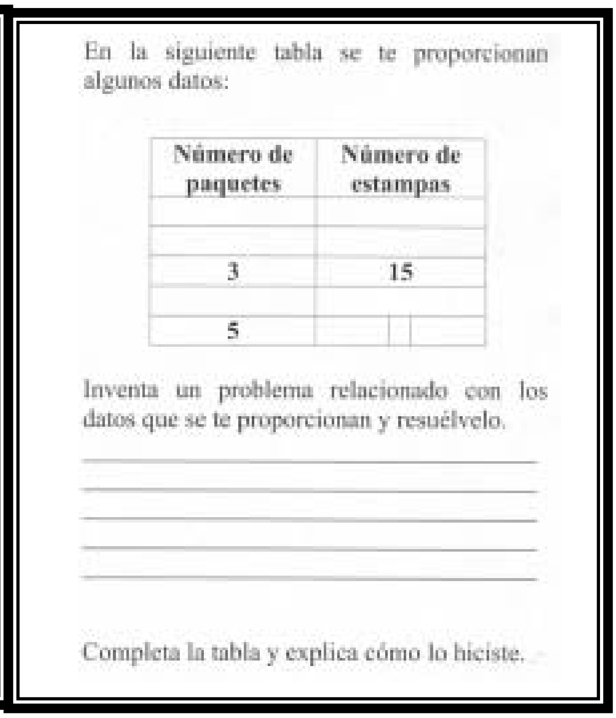


Andrés compro 4 bolsas de dulces y por ellas pagó $120:

Julián compró 7 bolsas de esos dulces:

¿Cuánto pagó por ellas? ______________.

¿Cómo resolviste el problema?



En la siguiente tabla se te proporcionan algunos datos:

Número de paquetes	Número de estampas
3	15
5	

Inventa un problema relacionado con los datos que se te proporcionan y resuélvelo.

Completa la tabla y explica cómo lo hiciste.

Tarea 9 **Tareas 10a y 10b**

En torno a la validación del cuestionario inicial

Una forma de validar el cuestionario lo constituyó el piloteo en sí mismo, pero hubo otras formas que se utilizaron en la validación, ya que interesaba ver más sobre los resultados, por ello se recurrió a la triangulación de tareas con elementos comunes.

La triangulación de algunas tareas permitió detectar lo que en los sujetos se expresa sistemáticamente.

Resultados y análisis del cuestionario inicial

Hay varias cosas que se detectaron en cuanto al pensamiento cognitivo de los estudiantes, a través de las estrategias que emplearon en la resolución de las tareas, y que se resumen brevemente.

No se ha explotado al máximo el pensamiento cualitativo de los estudiantes en torno a la proporcionalidad, lo cual se observó cuando manifestaron centración en una de las dimensiones de las figuras que se les pedía reducir o amplificar. El visualizar en su conjunto un dibujo, y no fijarse en cada una de las partes de él, para poder seleccionar la reducción del original, muestra la necesidad de trabajar más el aspecto cualitativo de la proporcionalidad., por lo que fue considerado como un aspecto que demandaba el estudiante ser trabajado en el Programa de Enseñanza.

En algunos estudiantes, lo cualitativo está planteado escasamente como antesala de lo cuantitativo, ya que dentro de las categorías lingüísticas detectadas en ellos, están las siguientes: “es más grande que...”, es más pequeño que...”, lo cual refleja una cierta comprensión de la proporción, pero en estos mismos alumnos no se encontraron otras categorías a través de las cuales mostraran un mayor entendimiento de la idea de proporción.

Mostraron confusión al establecer relaciones entre cantidades, por lo que fue necesario poner énfasis en ello para llegar a la noción de razón, a través de la propuesta de enseñanza.

Se reconoció la familiaridad que muchos alumnos tenían con el dibujo a escala, cuando una parte del dibujo ya estaba hecha, por lo que se ha señalado el predominio de la propiedad del cierre y que en ellos prevalece. La dificultad detectada es el no reconocimiento del factor escalar (x3) en este tipo de tarea.

Se observó la facilidad que tienen los niños para llenar una tabla, a través de sumar determinada cantidad de veces un mismo número o haciendo uso de la multiplicación, una vez encontrado el operador escalar correspondiente. El problema detectado en el empleo de la tabla fue, que los alumnos no extrajeron los datos de ella al dar respuesta a la situación planteada.

No hubo manifestación, por parte de los alumnos, en cuanto al uso de los diferentes modos de representación: tabla, dibujo, numérico; al resolver problemas clasificados como “problemas de valor perdido”, pues varias tareas del cuestionario entraron en esta categoría, aunque la situaciones planteadas eran diferentes., y sólo una de ellas (T9), fue resuelta correctamente por la mayoría del grupo.

Las actividades del cuestionario les permitían usar indistintamente cualquiera de los tres registros de representación mencionados, pero se observó que los niños no se percataron que el empleo de cualquiera de los tres los conducía a un mismo resultado, ya que en las resoluciones que dieron sólo se avocaron a trabajar con la representación propuesta en el problema. Ningún estudiante, por iniciativa propia, resolvió una misma tarea empleando al menos dos modos de representación diferentes.

Hay aspectos que no quedaron claros en el cuestionario, debido a que permitió explorar hasta cierto punto ya que este instrumento metodológico no puede abarcar toda la amplitud y profundidad requerida. Entre otros aspectos están los referidos a lo cualitativo en las relaciones proporcionales, al empleo de la mitad y el doble, ya que, en la aplicación, se conducían muy bien diferenciando una del otro, pero hasta ese

momento no se sabía si había confusión a nivel de designación. Por lo que estos y otros aspectos se abordaron en la enseñanza, de manera que los estudiantes indagaron, hicieron sus construcciones y establecieron sus propias convicciones.
Así, el cuestionario exploró cierto nivel que interesaba en la en la investigación y con la enseñanza se pretendió realizar una indagación más profunda.

Diseño de la experiencia de enseñanza

Las tareas del cuestionario exploratorio estuvieron inmersas en situaciones que se apegan a la realidad del estudiante. En el diseño de las actividades de enseñanza se tomó en cuenta la forma en que fueron construidas las tareas del cuestionario, así como las estrategias detectadas en los estudiantes. Con esto se comparte lo trabajado por Streefland (1990) en el diseño que hizo de un curso con actividades referidas a situaciones concretas de aplicación.

Con base en lo obtenido en el cuestionario se inició el diseño y el piloteo simultáneo de las actividades de enseñanza.

La propuesta de enseñanza estuvo integrada por ocho modelos de enseñanza, los cuales se retoman en diferentes sesiones ya que así fue conveniente para los fines que se perseguían. Se trabajaron en un período de treinta sesiones, ya que también se incluyeron actividades complementarias, porque así lo demandaba el grupo ante las necesidades de reforzamiento de algunos temas en los que mostraran cierta deficiencia.
En todas las sesiones se realiza una planeación previa en cuanto a los siguientes

aspectos:

- Trabajo del estudiante.
- Dinámica del trabajo (individual, en equipos de trabajo y/o a nivel de todo el grupo escolar).
- Intervención, por parte de la profesora-investigadora, en los distintos momentos de la dinámica del trabajo.
- Retroalimentación de lo trabajado con los alumnos.

Modelos de Enseñanza

A continuación se muestran los modelos que se utilizaron, los propósitos que se persiguen, el seguimiento de los contenidos y la forma en que se pretendió que fueran trabajados con los estudiantes.

Organización de la propuesta de Enseñanza

Modelo	**No. De sesio- Nes**	**Secuencia de las sesiones**	**Propósito(s)**	**Lo que se incorpora en cada sesión**	**Estructura de la dinámica del trabajo**
Diseño de salones de fiesta	2	Primera y segunda	Reconocimiento cualitativo de la noción de proporcionalidad.	**Integración del tamaño y la forma de los dibujos para la noción de proporcionalidad.** Obtención de más argumentos de los que en principio puedan mostrar los estudiantes, en cuanto a la noción de proporción se refiere.	Grupal-Colectivo-Indivdual.
El Mundo de Blanca Nieves y los 7 enanos	7	Tercera y cuarta	Profundización de la indagación y enriquecimiento de la noción de “reducción” (idea de la fotocopiadora o del dibujo a escala).	Adquisición y/o enriquecimiento de la noción de ”reducción” usando 3 vías: escrita, oral y empleo del dibujo. Utilizar argumentos de carácter cualitativo, para determinar la figura reducida.	Colectivo-Grupal-Colectivo-Individual.
El Mundo de Blanca Nieves y los 7 enanos		Quinta y sexta	Profundización en la indagación y enriquecimiento de la noción de “ampliación”(idea de la fotocopiadora o del dibujo a escala).	Adquisición y/o enriquecimiento de la noción de ampliación, en forma escrita, oral y usando el dibujo. Utilizar argumentos de carácter cualitativo, para determinar la figura amplificada.	Grupal-Colectivo-Individual.
El mundo de Blanca Nieves y los siete enanos		Séptima, octava y novena	Verificar la reducción de una figura usando algún instrumento de medida, para hacer comparaciones de naturaleza cuantitativa.	Hacer comparaciones de carácter cuantitativo y usarlas para la selección del dibujo reducido. Introducción de la tabla como recurso para organizar datos.	Grupal-Colectivo-Individual

				Emplear las frases “cuántas veces cabe...” o “qué parte representa de..” una figura en relación a otra, para trabajar *la mitad* y *el doble*. Emplear la tabla para determinar las dos razones vinculadas con dichos operadores.	
Elabora-ción de marcos para fotografí-as	2	Décima y décimo-primera	Definir a la razón como una relación.	Dar sentido a la razón, vista como una relación entre magnitudes. Usar la tabla para trabajar razones internas y externas.	Colectivo-Grupal-Individual.
El gran problema de la huella	1	Décimo-segunda	Utilizar la proporción a través de estimaciones.	Establecer una proporción utilizando la estimación como cálculo aproximado.	Por parejas-Colectivo.
Estable-cer propor ciones Elabora-ción de marcos para fotografía y El Mundo de Blanca Nieves y los siete enanos	3	Décimo-tercera, décimo-cuarta y décimo-quinta	Definir la proporción como una relación de igualdad entre razones.	Mostrar la relación de equivalencia a partir de notaciones que tienen que ver con naturales. Utilizar la tabla para establecer relaciones de equivalencia. Mostrar la relación de equivalencia asociada al signo igual. Significado de esa relación. Uso de notaciones aritmético-técnicas.	Grupal-Individual.
Torneo de fútbol	2	Décimo-sexta y décimo-séptima	Usar diferentes razones al trabajar la proporción.	Determinar las razones en las que se encuentran diferentes medidas de tres canchas de fútbol, con respecto a las medidas de la cancha oficial. Obtener los valores de las medidas faltantes de las dos canchas. Trabajar con las razones encontradas y mostrar su	Grupal-Colectivo-Individual.

				equivalencia para determinar proporciones.	
Construye tu propia cancha	1	Décimo-octava	Poder trabajar un problema en donde use la razón para determinar las medidas. Usar diferentes modos de representación al trabajar la proporción.	Pintar en el patio de su escuela la mayor cancha posible y que sea proporcional a la dada, conociendo el largo y ancho de su patio.	Colectivo-Individual.
La fotografía de tu equipo.	2	Décimo-novena	Trabajar con razones decimales, si llegara a darse el caso, al determinar proporciones. Usar diferentes modos de representación al trabajar la proporción.	Rescatar los procedimientos que usa el estudiante al trabajar proporciones. Que pueda hacer comparaciones entre los distintos modos de representación.	Grupal-Colectivo-Individual.

Progresión de las tareas de enseñanza

Se inicia tomando las ideas de “reducción” y “ampliación” apoyadas en modelos del tipo de la experiencia del dibujo a escala y de la fotocopiadora, donde se maneja la situación de semejanza. Con el cuestionario no se pudo determinar con certeza las interpretaciones que al respecto tiene el estudiante, para lo cual primeramente se emplean tareas que no requieran de la utilización de cantidades para su solución, tales como actividades de comparación que les permita a los alumnos reconocer relaciones de semejanza entre figuras en términos muy intuitivos.

Se continúa trabajando lo correspondiente a la medición de figuras para llegar a establecer relaciones con cantidades. Ahora las comparaciones son numéricas.

Se llega al reconocimiento de razones como la comparación por cociente de dos magnitudes. Se trabaja la notación de la razón como una fracción a/b.

Se utiliza la tabla como un modo de representación para la determinación de razones internas y externas. Se trabajan problemas de variación proporcional, en donde la obtención de cantidades no es sólo a través del uso del operador, sino estableciendo relaciones entre razones.

Se manejan planteamientos en donde no hay equivalencia entre las razones y otros en donde sí se muestra la equivalencia.

Finalmente, se trabaja la relación de equivalencia como una relación de proporcionalidad.

Para tener más claridad en lo trabajado con los modelos, se muestran algunos de ellos:

- **Modelo 1. Diseño de Salones de Fiesta**

El primer modelo se refiere al diseño de salones de fiesta, en donde el estudiante debe dividir un espacio determinado para tres salones que serían destinados a niños pequeños, niños más grandes y adultos, así también tendría que destinar el mobiliario que le correspondería a cada salón, el cual tiene que ser proporcional al tamaño de las personas.

El propósito del modelo consiste en el reconocimiento cualitativo de la noción de proporcionalidad, para lo cual se trabaja sobre la integración del tamaño y la forma de los dibujos, y se busca obtener más argumentos de los que al principio pudieran mostrar los estudiantes, en cuanto a la noción de proporción se refiere.

- **Modelo 2. El Mundo de Blanca Nieves y los siete enanos**

En el segundo modelo se empleó el cuento de la literatura clásica: Blanca Nieves y los siete enanos, el cual se utiliza en las siguientes siete sesiones. Este modelo permite ser trabajado a la luz de diferentes nociones; una de ellas es la noción de "reducción", apoyada en la experiencia del dibujo a escala y de la fotocopiadora, para lo cual se solicita a los estudiantes que hagan una comparación entre la cama de Blanca Nieves con respecto a la cama de los enanos, usando argumentos de carácter cualitativo. Se trabaja la noción de reducción a través de tres vías: escrita, oral y empleando el dibujo.

Posteriormente se utiliza este modelo al abordar la noción de ampliación, también apoyado en la idea de la fotocopiadora y del dibujo a escala. En este caso se emplea otro mobiliario de la casa de los enanos que es la mesa, y los alumnos deben seleccionar de entre cuatro opciones la mesa que corresponde a Blanca Nieves. En esa selección emplearon argumentos de carácter cualitativo.

En las siguientes sesiones del programa de enseñanza, este modelo permitió que el estudiante verificara la reducción y la ampliación de las figuras usando algún instrumento de medida para hacer comparaciones de naturaleza cuantitativa. Se introduce la tabla como un recurso para organizar datos. Se emplean las frases “cuántas veces cabe...” o “qué parte representa de ..”, al hacer referencia a la mitad y al doble de una magnitud.

❖ **Modelo 3. Taller de marcos para fotografías**

En este modelo el estudiante tiene que medir tanto el largo como el ancho de las fotos para hacerle sus marcos. Posteriormente establece relaciones entre los largos de ambas fotos y entre los anchos de ellas, llegando así a definir a la razón como una relación entre magnitudes. Se emplea la tabla para trabajar razones internas (cuando compara lo que miden los largos de las dos fotos) y razones externas (cuando compara el largo con el ancho de una foto)

Una vez definida lo que es una razón y después de haber determinado algunas, se procede a trabajar la proporción.

❖ **Modelo 4. El gran problema de la huella**[15]

En el modelo titulado el gran problema de la huella se le pidió al grupo trabajar por parejas para encontrar a la persona buscada en el problema planteado, conociendo el largo de una huella y estaturas de varias personas medidas en centímetros. Con este modelo se aborda la proporción utilizando la estimación como cálculo aproximado.

♦ Modelo 5. Establecer proporciones

Planeación de las tres sesiones

Propósito: **Definir a la proporción como una relación entre razones.**

En estas sesiones se retoman dos modelos: Elaboración de marcos para fotografías y Blanca Nieves y los siete enanos. A través de preguntas que se formulan a los estudiantes se llega a definir la proporción como una relación de igualdad entre razones. Se muestra la relación de equivalencia a partir de notaciones que tiene que ver con números naturales así como la relación de equivalencia asociada al signo igual, intentando dar significado a esa relación y se emplean notaciones aritmético-técnicas.

❖ **Modelos 6 y 7 Torneo de fútbol y Construye tu propia cancha**

El modelo seis se utilizó para determinar las razones en las que se encuentran diferentes medidas de tres canchas de fútbol, con respecto a las medidas de la cancha oficial, dados algunos valores. El estudiante trabajó con las razones encontradas para mostrar su equivalencia al determinar proporciones.

---

[15] Adaptación de una actividad de Lesh, tomada de Lesh y Doerr, (en prensa)

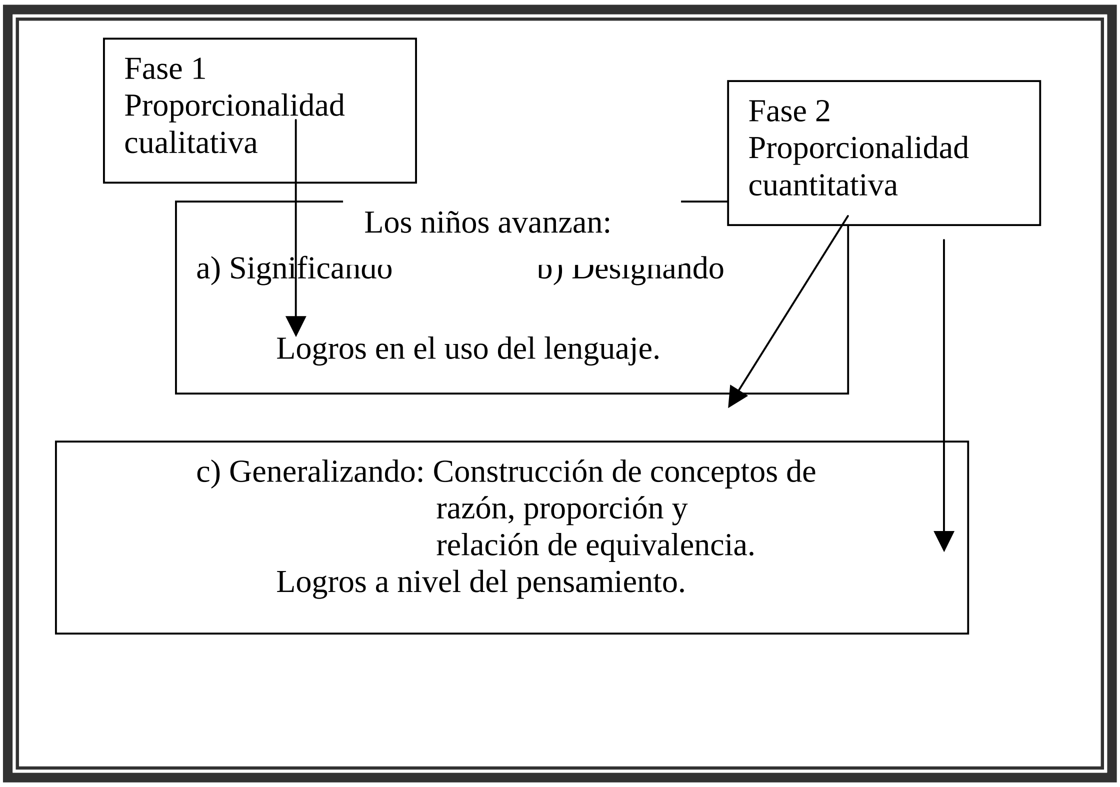
Posteriormente con el modelo siete el alumno pintó en el patio de su escuela una cancha que fuera la mayor de acuerdo a las medidas de largo y ancho del patio y proporcional a la cancha oficial. El estudiante utilizó diferentes modos de representación al trabajar la proporción.

❖ **Modelo 8. La fotografía de tu equipo**

En las últimas sesiones de enseñanza se emplea el modelo la fotografía de tu equipo, que consistió en determinar la estatura de los integrantes del equipo, conociendo su medida en la foto y la estatura de algunos de ellos. Aquí se trabajaron con razones decimales al determinar proporciones, se pretendió rescatar los procedimientos que usa el estudiante y las comparaciones que puede hacer entre los distintos modos de representación.

Análisis global de la Aplicación de las Sesiones de Enseñanza

El análisis global de los resultados de la experiencia de enseñanza se basó en el siguiente esquema:



A continuación se hace necesario recapitular los puntos más sobresalientes y que se resumen a través de las tres etapas desarrolladas en esta propuesta didáctica: significando, designando y generalizando.

A nivel del pensamiento cualitativo de los estudiantes, en torno de la proporcionalidad, se concluye que lograron dar significado a las expresiones verbales que empleaban, cuando trabajaban con las nociones de reducción y ampliación.

Hacían comparaciones ya desde el terreno cualitativo cuando decían: *"es más grande que... pero..."* la palabra "pero" los remitía a comparar dos propiedades, sin usar cantidades.

Cuando los estudiantes dieron sentido a las nociones de reducción, ampliación, fracciones equivalentes, uso de operadores, empleo de los términos razón y proporción, habían rebautizado lo que ellos de alguna forma habían trabajado en grados previos (manejaban el término proporción, no así el de razón, pero antes del programa de enseñanza no tenían el significado adecuado de proporción).

Dentro de los avances detectados así como las dificultades que dejaron ver los estudiantes está lo siguiente:

Al principio los alumnos no podían hacer un amplio uso de los operadores multiplicativos, pero a medida que tuvieron más precisión al determinar las relaciones de las medidas establecidas, pudieron hacer uso de modo extenso de los operadores.

A nivel de la equivalencia, a partir de que pudieron reconocer la aplicación de algoritmos establecidos en la enseñanza previa y todo el trabajo que se hizo para que lograran nuevos reconocimientos, permitió el uso de diversas estrategias para la identificación de fracciones equivalentes como la antesala de la proporción en el terreno cuantitativo.

Al principio el operador no estaba al servicio en la búsqueda de razones, al final del Programa de Enseñanza el operador fue un instrumento para construir razones.

Los alumnos no sólo estaban leyendo las fracciones de la tabla sino las estaban construyendo, es decir, vía interpretación empezaron a organizar y a configurar las fracciones.

Hubo mayor facilidad al trabajar con razones internas que con externas.

Durante el Proceso de Enseñanza se detectaron varios obstáculos cognitivos, algunos fueron superados por la mayoría del grupo, pero otros por una minoría. En este último caso se menciona la escritura fraccionaria del "cuádruplo".

Finalmente, llegaron a la construcción de los conceptos de razón y proporción cuando pudieron emplearlos al resolver diferentes situaciones usando indistintamente los tres registros de representación: el del dibujo, el de la tabla y el numérico. Es decir el empleo de ellos fue una forma de preservar los significados fundamentales implicados en razón y proporción.

Cuestionario final

Una vez concluida la puesta del programa de enseñanza, se procedió a aplicar el cuestionario final, la finalidad fue compararlo con el inicial y poder tener un primer reconocimiento del grado de avance que llegaron a tener los estudiantes una vez concluida la enseñanza.

Las tareas que integraron al cuestionario final fueron las mismas que las del cuestionario inicial, pero el objetivo de su aplicación fue diferente. En cuanto al Cuestionario final, su principal objetivo fue el de evaluación del programa de enseñanza, a través de los contrastes ente ambos cuestionarios y entre el programa de enseñanza y el cuestionario final.

Por un lado, se comparan las estrategias y modos de representación, empleados por los estudiantes, en las resoluciones de las tareas de los cuestionarios. Por otra parte, se contrasta el seguimiento efectuado de las elaboraciones que los estudiantes mostraron y en general, de la maduración que alcanzaron en torno a las nociones de razón y proporción, reflejada en la forma de enfrentar las actividades propuestas con referencia a los modelos del programa de enseñanza, con los resultados encontrados en el cuestionario final, tomando como base la manera en que abordaron sus tareas, para lo cual se revisan ejemplos en los que se muestran ciertos patrones recurrentes de los estudiantes al resolver las distintas actividades.

Casi en su totalidad, los estudiantes manifestaron un desarrollo de su pensamiento proporcional tanto en el terreno cualitativo como cuantitativo.

La mayoría reconoció a la reducción y a la ampliación como una forma específica de la proporción.

Usaron términos propios del lenguaje matemático con el significado que tienen, como el de razón y proporción, reconociendo a la primera como una relación entre magnitudes y a la segunda como una relación de equivalencia entre razones.

Emplearon distintos modos de representación: el del dibujo, el de la tabla y el numérico, lo que se observó cuando trabajaron con algunas tareas del cuestionario final.

A pesar de lo señalado, hay tópicos que quedaron planteados de manera superficial y que se hace necesario profundizar en ellas, como lo referente al empleo de los sistemas simbólicos de representación, el uso de los inversos, el apoyo en los operadores para el establecimiento de razones.

Diseño de entrevistas

Las entrevistas se desarrollaron al final, para poder constatar cómo a distintos estudiantes les favoreció el programa de enseñanza.

Fueron entrevistas semi-estructuradas, pues se llevó un guión que implica la organización de cada tarea, un texto básico de cada una de ellas presentado de manera escrita, pero se dio libertad al sujeto de incorporar toda la reflexión que fuera pertinente, recuperando, cuando eran necesarias, las preguntas originales, esto es, en el momento en que pareciera que había un bloqueo, se formularon preguntas que guiaron al entrevistado a la solución de lo que se le planteó en inicio. Además, si el sujeto no terminaba una tarea, se le permitíae pasar a la siguiente, para después volver a la que había quedado incompleta, formulándole preguntas no sugestivas, por parte de la autora/investigadora, con el fin de que el estudiante pudiera explicitar su pensamiento.

Las entrevistas estuvieron puestas al servicio de una evaluación final, porque interesó reconocer hasta dónde la enseñanza les permitió avanzar a los estudiantes, además de profundizar los datos que el cuestionario final había arrojado. La autora/investigadora trabajó conduciendo los diálogos en los cuales se reservó ella misma el rol de quien preguntaba de modo no sugestivo, y el protocolo original no tenía grandes variaciones.

Sobre lo que se tomó en cuenta para las entrevistas

Las entrevistas derivan de la enseñanza que se llevó a cabo, y algunas tareas se recuperaron de ésta o son tomadas del cuestionario; mientras que las demás se generaron al producirles cambios. Respecto al tipo de tareas se incluyó lo siguiente:

- Recuperar lo cualitativo. Esto es, de qué manera los estudiantes mantenían y ordenaban lo cualitativo a la luz de haber trabajado lo cuantitativo.

- Cómo manejaban los alumnos los operadores multiplicactivos en la construcción de las razones. De qué manera pasaban de un valor a otro de una misma escala (Vergnaud, 1983), cuando usan una tabla.
- De qué naturaleza es la relación, cómo la comprendieron los estudiantes.
- ¿Cuándo emplean razones internas y cuándo externas, al resolver problemas de valor perdido?
- Si planteaban una situación que los condujera a utilizar una proporción para resolverla.

Acerca de las personas elegidas para ser entrevistadas

Se eligieron a tres estudiantes del grupo para ser entrevistados, para lo cual se tomó en cuenta el desempeño mostrado durante el programa de enseñanza, revisando los resultados del cuestionario inicial y el final. Para la selección se consideraron las elaboraciones y estrategias que desarrollaron al resolver situaciones que involucraban razones y proporciones.

Acerca de las tareas que se aplicaron en las entrevistas

Se aplicaron tres entrevistas a cada estudiante, una por día. Las tareas propuestas en ellas guardaban relación con la secuencia trabajada en la Propuesta de enseñanza, ya que se inicia revisando la manera en que los estudiantes mantuvieron y ordenaron lo cualitativo a la luz de haber trabajado lo cuantitativo; el peso que tuvo la imagen visual y lo perceptual en la resolución de las tareas, el manejo que le dieron a las tablas, el reconocimiento en ellas de las razones y su expresión como fracciones. Interesó también determinar cuándo emplearon razones internas y cuándo externas; el pasaje de un sistema simbólico a otro y si pudieron plantear una situación que los condujera a utilizar una proporción para resolverla.

Las entrevistas permitieron **realizar 3 estudios de casos** con particularidades diferentes:

El primer caso en estudio fue el de Nuria, quien caracterizó al sector del grupo que mostró facilidad para utilizar indistintamente cualquiera de los tres modos de representación (el del dibujo, el de la tabla y el numérico), al resolver las situaciones planteadas. Con este caso se muestra el paso de un sistema simbólico a otro, sin dificultad, es decir, se observó cierta habilidad en el uso de uno u otro al resolver problemas de razón y proporción.

El segundo caso fue el de Paulina, quien caracterizó a aquellos estudiantes que mostraban gran apego al manejo de algoritmos, éstos al principio carecían de sentido, el cual fue establecido con posterioridad a la experiencia de enseñanza y también reflejó un uso frecuente tanto de razones como de proporciones, al resolver las actividades planteadas. Mostró facilidad para la determinación de razones expresadas en forma fraccionaria así como en el establecimiento de proporciones, como la equivalencia entre dos razones. Además, pese al progreso en el terreno numérico, no abandonó del todo el aspecto cualitativo de la proporcionalidad.

El tercer caso corresponde a Wendy, quien fue una de los estudiantes que podía resolver problemas de valor perdido más fácilmente, si empleaba la tabla, no así con los otros dos modos de representación, el del dibujo y el numérico, es decir, utilizaba adecuadamente los valores conocidos que integran una tabla, al reconocer y establecer razones y proporciones, pero mostraba dificultad si esos mismos valores formaban parte de una figura, en esta situación había confusión, ya que establecía relaciones incorrectas. Ella también caracterizó a los estudiantes en los que se observó en general un mayor avance, ya que tuvieron un punto de partida relativamente pobre y concluyeron con mejor nivel al enfrentar problemas de razón y proporción.

El caso de Nuria

Después de haber analizado las entrevistas hechas a Nuria, se puede decir que tuvo varios logros a nivel conceptual y del lenguaje, los que se especifican en los siguientes párrafos.

Pudo establecer estrecha correspondencia entre su pensamiento cualitativo y cuantitativo, en torno a razón y proporción.

Se desenvolvió de forma adecuada en los tres registros de representación: el del dibujo, el de la tabla y el numérico, al determinar razones y proporciones; además, llegó a una integración de ellos, pues Nuria tomó los datos de los problemas planteados y operó con éstos, una vez que los había vaciado en una tabla o colocado en las dimensiones correspondientes de una figura, que ella misma había dibujado. El buen desempeño que tuvo en cada modo de representación se reflejó en los logros alcanzados durante los distintos momentos claves que se dieron en el Programa de Enseñanza

La forma de proceder de Nuria, en la mayoría de los casos, fue midiendo, comparando y determinando relaciones, es decir, la medición la llevó al establecimiento de vínculos.

Llegó a un manejo convencional de la escritura de las razones como fracciones, lo que implicó el avance que tuvo en el uso del lenguaje técnico; siguiendo a Freudenthal (1983), es posible interpretar que Nuria empezó a adentrarse en lo que es un dominio incipiente de los racionales.

Reconoció a la razón como una relación entre magnitudes y a la proporción como una relación de equivalencia entre razones.

El programa de enseñanza le permitió una construcción conceptual elemental, ya que le sirvió de introducción de manera clara y fuerte sobre razones y proporciones, sabiendo que seguirá un tratamiento de esto en los siguientes niveles educativos.

El caso de Paulina

Paulina mostró un fuerte avance en torno a dos aspectos importantes:

1) La carga de sentido que le dio al empleo de algoritmos y,
2) El desarrollo de su pensamiento cualitativo en torno a razón y proporción.

El trabajo algorítmico le permitió a la entrevistadora explorar el reconocimiento tácito de los operadores en los que Paulina estaba pensando, que fueron tanto naturales como fraccionarios, estos últimos de manera implícita, al multiplicar un valor por un número, como primer paso y posteriormente dividir lo obtenido entre otro número, o dividir primero y multiplicar después. Esta forma de proceder remite a Dienes (1971a, b y 1972) y a Kieren, 1985. Por otro lado hay una coincidencia con lo dicho por Valdemoros, 1993a, respecto a que a temprana edad los niños tienen habilidad en el uso de operadores. Además, en Paulina se observó la facilidad de emplear tanto el factor escalar como el factor función, lo que coincide con Vergnaud, 1991.

A nivel de lo que es la construcción de significados, éstos fueron enriquecidos junto con los procesos de significación. En cuanto a su designación, Paulina llegó a usar los términos matemáticos correspondientes. Finalmente, llegó a la construcción de los conceptos de razón y proporción, lo que mostró por su aplicabilidad en distintos ámbitos y por la utilización de los distintos modos de representación.

Por otra parte, Paulina mostró en la resolución de las distintas tareas, la fuerza que cobró el dato perceptual y el apoyo en su experiencia, lo que implicó el desarrollo alcanzado en el terreno cualitativo de la proporcionalidad.

También en esta niña se observaron mayores niveles de abstracción al procesar su pensamiento, hecho que se menciona por el uso frecuente del recíproco, coincidiendo con los planteamientos de Piaget.

Algo más que decir de Paulina fue el hecho de que comprendió que no toda fracción es una razón.

El caso de Wendy

Wendy mostró un gran avance después de las sesiones trabajadas durante la experiencia de enseñanza, superó la idea de "centración" en una sola dimensión en las figuras, lo que al principio estaba muy arraigada en ella, pudiendo amplificar o reducir en las dos dimensiones lineales de las figuras. Logró darle sentido a los algoritmos que usó para resolver las situaciones de proporcionalidad. Empleó razones y proporciones de manera adecuada, obteniéndolas de una tabla o del mismo texto de las situaciones planteadas. Usó operadores naturales y fraccionarios para pasar de una escala a otra o entre distintos valores de una misma escala.

Se le facilitó trabajar con mitades y con tercios pero, admitió la existencia de otros operadores fraccionarios.

Utilizó la tabla como un registro de representación ya que a través de ella construyó razones como fracciones. Esto muestra un pasaje del gran avance logrado en Wendy ya que al inicio del Programa de Enseñanza mostró entre otras dificultades el extraer datos de una tabla para dar respuesta a lo demandado, el no poder organizar los datos en una tabla y la imposibilidad de leer en ella a las razones. Después de la Propuesta Didáctica, Wendy no solo leía las razones al relacionar las magnitudes sino que las construía.

Conclusiones Generales

- Este programa de enseñanza fue desarrollado en tiempos escolares reales y se espera que los alumnos seguirán abordando los tópicos de razón y proporción, con la profundidad requerida, en los siguientes niveles educativos.
- Por sus fundamentos y por el carácter constructivista de la experiencia de enseñanza, se considera que puede ser desarrollada por los profesores que se

encuentran en activo en las escuelas primarias y que muestran un interés ante la problemática de la enseñanza de los tópicos de razón y proporción, como un modelo que les permita hacer nuevas propuestas con base a su creatividad y habilidad.

- Esta investigación muestra que el estudio de razón y proporción en sexto grado, debe partir de reconocimientos cualitativos para llegar hasta la cuantificación, pues de esta manera los alumnos primeramente encuentran el significado de términos que posteriormente rebautizarán con nombres empleados en el lenguaje de la matemática, lo que los conducirá a darles el sentido que tienen hasta llegar a la generalización de conceptos.
- La secuencia de presentación de los modelos de enseñanza, permitió que los estudiantes no abandonaran su pensamiento cualitativo al resolver problemas de razón y proporción, después de haber trabajado lo cuantitativo. Lo cual se asemeja a lo señalado por Kieren (1988), quien destaca que en el paso de lo concreto a lo abstracto, lo intuitivo no se abandona totalmente.
- Se empezó trabajando con lo que los sujetos dominaban previamente, que eran los números naturales y una vía que permitió a los estudiantes hacer el pasaje del empleo de ellos a la escritura fraccionaria fue el uso de las tablas y de ciertas expresiones *coloquiales* (asociadas al uso de operadores multiplicativos) como “la mitad de...”, “ el doble de ...”, entre otras. Los niños comenzaron a tener un buen manejo de las expresiones fraccionarias, estableciéndose una base elemental y sólida para el desarrollo del sistema de los números racionales, lo cual es un gran logro, si se toma en cuenta lo que dice Freudenthal (1983) respecto a que los racionales permiten dar un tratamiento sistemático a razón y proporción.
- El salto del lenguaje natural al técnico se dio cuando los niños rebautizaron los términos y este paso dio también lugar a otras representaciones numéricas, correspondientes a los racionales.
- El pasaje de lo aditivo a lo multiplicativo se dio cuando los niños se percataron de lo que estaban sumando, de esta manera aditaban las mismas cantidades o magnitudes, es decir, efectuaban sumas reiteradas llegando a realizar multiplicaciones. En este tránsito tuvo un gran peso el uso de las expresiones “cuantas veces cabe una magnitud en otra” o “cuántas veces contiene una magnitud a la otra” y el manipular figuras de papel, sobreponiéndolas para determinar la cantidad de veces que una dimensión cabe en la otra.

- ❖ Durante las sesiones de enseñanza hubo mucho trabajo espontáneo por parte de los niños, lo que se reflejó en la forma de abordar las situaciones planteadas, como en el caso del Modelo de la Huella (tomado de Lesh y posteriormente adaptado) en donde los niños relacionaron la medida de su calzado con su estatura, sin que fuera sugerido por la investigadora.
- ❖ Se considera que se pueden llegar a buenos resultados con la propuesta de enseñanza si se siguen las distintas modalidades de intervención que realizó la investigadora durante su aplicación, como: formular preguntas y registrar lo que los alumnos dicen al interior de los equipos, propiciar a nivel colectivo una discusión que permita a los estudiantes exponer y defender sus puntos de vista, dar explicaciones cuando sean demandadas por los alumnos, hacer formulaciones que les permita regresar al tema, si es que hubiera alguna desviación de él que los alejara del objetivo de la sesión, aclarar dudas cuando fuera demandado a nivel individual. En general, desarrollar el papel de conductor(a) durante el programa de enseñanza, encausando diversas reflexiones para que los estudiantes alcanzaran los objetivos planteados en esta investigación.

Bezuk. N. (1989). Preservice elementary teacher's understanding of proportional reasoning missing value problems. *Proceedings of the 11th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of mathematics Education. 212-218.*

Brown, M., Hart, K. y Küchemann, D. (1984). *Chelsea Diagnostic Mathematics Tests. Ratio and Proportion.* Windsor, G. B.: NFER-Nelson. 1-6

Camarena, P., Rondero, C., y Colín, J. Una enfoque histórico de la Enseñanza de la Enseñanza de la Matemática en el IPN. Ponencia presentada en 1985 en la *Sexta Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Guadalajara, Jal.*

Coll, C. (1983a). La construcción de esquemas de conocimiento en situación de enseñanza/aprendizaje. En: C. Coll (Ed.). *Psicología genética y aprendizajes escolares, (183-20).* Madrid: Siglo XXI.

Coll, C. (1983b). Las aportaciones de la psicología a la educación: el caso de la teoría genética y de los aprendizajes escolares. En: C. Coll (Ed.). *Psicología genética y aprendizajes escolares, (15-41).* Madrid: Siglo XXI.

Coll, C. (1995). *Psicología y Currículum.* México: Paidos. 118-119.

Coll, C. (1990). Un Marco de Referencia Psicológico para la Educación Escolar: La concepción constructivista del Aprendizaje y de la enseñanza. En: C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Eds.). *Desarrollo Psicológico y Educación. V:II. Psicología de la Educación. (435-453).* Madrid: Alianza.

Cotret, R. S. (1991). *Étude de l'influence des variables indice de proportionnalité du teme et nombre de spules de dones sur la reconnaissance, le traitement et la comprensión de problèmes de proportionnalité chez des eleves de 13-14 ans.* Tesis Doctoral: l'Úniversité Joseph Fourier. Grenoble.

Dienes, Z. P. (1971). *Cómo utilizar los Bloques Multibase.* Barcelona: Teide. 5-7.

Dienes, Z. P. (1972). *Estados y operadores. Operadores multiplicativos.* Barcelona: Teide. 7-32.

Dienes, Z. P. (1971). *Estados y operadores. Operadores aditivos.* Barcelona: Teide. 9-15.

Ducrot, O. y Todorov, T. (1998). *Diccionario enciclopédico de las Ciencias del Lenguaje.* México: Siglo XXI. 122-123, 147-149, 288.

Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales.* Tesis Doctoral. Matemática Educativa-CINVESTAV, México.

Figueras, O; Filloy, E. y Valdemoros M. (1985a). The Development of Spatial Imagination Abilities and Contextualisation strategies: Models Based on the Teaching of Fractions. L. Streefland (Ed.). *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* 1 (328-333) . Utrecht, The Netherlands.

Figueras, O; Filloy, E. y Valdemoros M. Ponencia sobre el Desarrollo de Habilidades de Imaginación Espacial y Estrategias de Contextualización: Modelos Basados en la Enseñanza de Las Fracciones. Presentada en 1985 en la *Sexta Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Guadalajara, Jalisco, México.

Figueras, O; Filloy, E. y Valdemoros M. (1986). Some Considerations on the Graphic Representation of Fractions and their Interpretation. G. Lappan (Ed.). *Proceedings of the Eight Annual Meeting of the PME-North American Chapter,* I (78-83). East Lansing, Michigan..

Figueras, O; Filloy, E. y Valdemoros M. (1987). Some difficulties which obscure the appropriation of the fraction concept. *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* 1 366-372

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Holland Dordrechet: D. Reidel Publishing Company. 28-33, 178-209.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Concepts and operations in the Middle Grades, 2.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. 198-219

Hill, J. (1987). *Geometry for Grades K-6. Readings from the Arithmetic Teacher.* Reston VA: NCTM. 41-48.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. En: R. Lesh y M. Landau (Eds.). *Acquisitions of Mathematics Concepts and processes (45-90).* New York: Academic Press.

Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the Construction of Rational Number Ideas En: Zweng et. al. (Eds.). *ICME Proceedings of the Fourth International Congress on mathematical education, (506-508). Birkhauser Boston.*

Kieren, T. (1984). Mathematical Knowledge Building: The mathematics Teachers As Consulting Architect. *35th International Congress on Mathematical Education.* 187-193.

Kieren, T., Nelson, D. y Smith, G. (1985). Graphical Algorithms in Partitioning Tasks. *The journal of mathematical behavior 4.* 25-36: Edmonton, Alberta, Canadá.

Larson, S., Behr, M. y Harel, G. (1989). Proportional reasoning young adolescents: An analysis of strategies. *Proceedings of the 11th. Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 181-186.*

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En: J. Hiebert y M. Behr. (Eds.). *Concepts and operations in the Middle Grades, 2.* Reston,Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. 93-139

Lesh, R. y Doerr, H. M. (en prensa). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching and learning. En: H. M. Doerr y R. Lesh (Eds.). *Beyond constructivism: A models and modeling perspective*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Limón, M. y Carretero, M. (1998). Las ideas previas de los alumnos. ¿Qué aporta este enfoque a la enseñanza de las ciencias? En: M. Carretero, M. Baillo, M. Limón, A. López. y M. Rodríguez. (Eds.). *Construir y Enseñar las Ciencias Experimentales. (19-45),* Buenos Aires: Aique.

Markovits, Z., Hershkowits, R y Bruckhemer, M. (1986). Proportional Reasoning Somme related situations. *Proceedings of the 10th. Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* 265-270.

Mellar, H. (1991). Modeling students´thinking on a proportional reasoning task. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology,* 22, 1. 111-119.

Nesher, P. and Sukenik, M. (1989). Intuitive and formal learning of ratio concepts. *Proceedings of the 13th. Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* 33-40

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part. I E*ducational Studies in Mathematics, 11-2.* 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. *Educational Studies in Mathematics, 11-3.* 331-363

Pérez, M. y Pozo, J. (1999). Aprender a resolver problemas y resolver problemas para aprender. En: Juan P (Coord.) *La solución de problemas.* (14-52). México: Aula XX1/Santillana.

Pérez, M. (1999). La solución de problemas en matemáticas. En: Juan P. (Coord.) *La solución de problemas.* (54-83). México: Aula XX1/Santillana.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1978a). Las operaciones intelectuales y su desarrollo. En J. Delval (Ed.). *Lecturas en Psicología del niño, I. (70-119).* Madrid: Alianza Editorial.

Piaget, J. (1978b). *Psicología del Niño.* Madrid: Ediciones Morata. 131-150.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente.* Buenos Aires: Paidos

Polya, G. (1984). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas. México.

Real Academia de la Lengua Española. (2001). *Diccionario de la Lengua Española, II.* Madrid Espasa Calpe. 2144.

Rodríguez, M. y Carretero, M. (1998). Adquisición de conocimiento y cambio conceptual. Implicaciones para la enseñanza de la ciencia. En: M. Carretero, M. Baillo, M. Limón, A. López. y M. Rodríguez. (Eds.). *Construir y Enseñar las Ciencias Experimentales. (47-73),* Buenos Aires: Aique.

Ruiz, E. F., Ruiz, E., Acosta, F. (1997a). Resolución de problemas a nivel primaria haciendo uso de la calculadora Math Explorer. *Resúmenes de la Reunión*

Latinoamericana de Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. 245.

Ruiz, E. F., Ruiz, E., Acosta, F.(1997b). Taller de Resolución de problemas a nivel medio, haciendo uso de la calculadora Math Explorer Plus. *Memoria del XVI Congreso Nacional de la Enseñanza de las Matemáticas. Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas. Escuela Normal Superior del Estado de México.* 17-18.

Ruiz, E. (1997). Uso de las calculadoras Math Explorer y TI-92 en la Resolución de Problemas: Una experiencia con profesores de los niveles básico y medio. *Memorias del Seminario Nacional de Calculadoras y Computadoras en Educación Matemática.* 25-35.

Ruiz, E. (2000a). Estudio de Estrategias de Solución y una Propuesta para la enseñanza de razón y proporción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame, 14, 362-369.*

Ruiz, E. (2000b). Study Of Solving Strategies And Proposal For The Teaching Of Ratio And Proportion. *Proceedings Of The Twenty-Second Annual Meeting North American Chapter Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education, 2*, 395-396.

Ruiz, E. (2001). Una Propuesta de Enseñanza de razón y proporción trabajada con estudiantes de Educación Primaria. En M. Falsetti y M. Rodríguez (Edsa.). *Función Continua. Experiencias de Enseñanza de Matemáticas. 11-II.* (5-19). República de Argentina.

Ruiz, E., y Valdemoros , M. (2001a). A Teaching Proposal about Ratio and Proportion worked with students of Elementary School. Short Oral. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Utrecht-The Netherlands. 1-361.*

Ruiz, E., y Valdemoros , M. (2001b). A Teaching Proposal about Ratio and Proportion worked with students of Elementary School. Research Report. *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting of PME-NA, Snowbird, Utha 1* 291-299.

Szymansky, M. (1999). The cognitive demand theory: A developmental framework for infant numerical Knowledge. *Memorias del 29th Annual Symposium of the Jean Piaget Society.* Antiguo Colego de San Ildefonso. México.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press.

Schwartz, H. y Jacobs, J. (1984). *Sociología Cualitativa. Método para la Reconstrucción de la Realidad.* México: Trillas. 61- 89.

SEP (1993). *Plan de programas de estudio. Educación Básica. Primaria.* Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal. México.

SEP (1995). *Matemáticas. Sexto grado.* Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos. México.

Sole, I. y Coll, C. (1999). Los profesores y la concepción constructivista. *El constructivismo en el aula* (7-23). Barcelona: Graó.

Streefland, L. (1984a). Search for the roots of ratio: Some trought on the long term learning process. Part I. *Educational Studies in Mathematics, 15-3.* 327-348.

Streefland, L. (1984b). Search for the roots of ratio: Some trought on the long term learning process. Part II. *Educational Studies in Mathematics, 16-1.* 75-94.

Streefland, L. (1990). Free Productions in Teaching and Learning Mathematics En: K. Gravemeijer, M. Van de Hunal y L. Streefland (Eds.), *Contexts Free Productions Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education* (33-52). Utrecht: Research group for Mathematical Educational Computer Center State University of Utrecht, The Netherlands.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education*. Tesis doctoral publicada por la Kluwer Academic Publishers. 46-134.

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course a theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics, 25.* 109-135.

Valdemoros, M. (1988). Ciertos Caminos hacia la Identificación de la Fracción. *Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* 269-275.

Valdemoros, M. Construcción del Lenguaje de las fracciones en tareas de reparto. Conferencia presentada en 1992 en el *Cuarto Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. Cd. Juárez. México.

Valdemoros, M. (1993a). *La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él.* Tesis Doctoral. México: Cinvestav-Matemática Educativa.

Valdemoros, M. (1993b). The Language of Fractions as an Active Vehicle for Concepts. *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of PME-NA, 1* 233-239.

Valdemoros, M. (1994). Various Representations of the Fractions through a Case Study. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2.* 16-23.

Valdemoros, M. (1997). Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones: Estudio de caso. *Educación Matemática.* México: Iberoamérica. 9-3, 5-17.

Valdemoros, M. (1998). La constancia de la unidad en la suma de fracciones: Estudio de caso. En: F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II (465-481).* México: Iberoamérica.

Valdemoros, M. (2001). Las fracciones, sus referents y los correspondientes significados de unidad: Estudio de Casos. *Educación Matemática, 13, 1.* 51-67

Vergnud, G. (1983). Multiplicative structures. En: R. Lesh y M. Landau (Eds.). *Acquisitions of Mathematics concepts and processes (127-174).* New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1991). *El niño las matemáticas y la realidad.* México: Trillas. 197-223.

Von Glasersfeld, E. (1995). A constructivist approach to teaching. In L. Steffe & J. Gale (Eds.). *Constructivism in education*, (*3-16).* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Vallejo-Nájera, A. (1999). Las matemáticas del cuerpo. En: A. Vallejo-Nájera (Ed.). *¿Odias las Matemáticas? (46-48).* España: Ediciones Martínez Roca.