El Volumen ¿Por dónde empezar?

Mariana Sáiz Roldán
msaiz@upn.mx
saizmar@yahoo.com

El concepto matemático de volumen es uno de los contenidos señalados por planes y programas de estudios para la educación básica. Desde preescolar se menciona como uno de los temas a tratar en las clases, en la primaria se introduce a partir de cuarto grado (aunque desde primero se trabaja con la capacidad) y su estudio se continúa durante los tres grados de educación secundaria.

En nuestra vida cotidiana nos movemos en un mundo de tres dimensiones. Todos los objetos que existen en este mundo tienen volumen. Nuestros movimientos de manera implícita toman en consideración nuestro propio volumen. Sabemos si podemos pasar o no por debajo de una cerca. Sabemos si cabemos en el vagón del metro o esperamos otro tren. Con frecuencia podemos saber si un vestido nos queda, aun antes de medírnoslo.

También manejamos con destreza el volumen de los cuerpos que nos rodean y los espacios delimitados por paredes. Claro que a veces nos equivocamos y el mueble que tanto trabajo costó subir por la escalera no cabe en el espacio que habíamos previsto.

Lo que quiero decir con todo esto es que el volumen es la magnitud de nuestro mundo. El mundo no es unidimensional, ni plano. Los seres vivientes son cuerpos tridimensionales. Por otro lado medir es una actividad común en todas las sociedades. Así que no es extraño que en muchas ocasiones necesitemos medir el volumen de un cuerpo.

De modo que el concepto de volumen tiene su importancia en nuestra vida cotidiana y además es uno de los contenidos señalados en planes y programas de estudio, no sólo en nuestro país.

Los maestros necesitan enseñar este concepto a sus estudiantes. ¿Qué necesitan saber los maestros sobre el volumen para poder enseñarlo mejor?

En general, para enseñar cualquier concepto matemático, resulta de utilidad tener conocimientos sobre:

- El concepto en cuestión desde el punto de vista de las matemáticas
- Algunas dificultades cognitivas que se han detectado en estudios realizados con niños
- Modelos de enseñanza propuestos por expertos para el concepto en cuestión

Los puntos anteriores no son categorías ajenas ni excluyentes. Algunos elementos de uno de ellos se reflejan o forman parte de alguno de los otros y así. Sin embargo es posible hacer la clasificación para ordenar esta exposición.

En esta plática quiero exhibir algunos elementos de cada uno de estos puntos en relación con el concepto de volumen. Mi idea es reflexionar juntos sobre diferentes aspectos que tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de volumen. Considero que estos conocimientos pueden dar lugar al diseño de algunas situaciones didácticas que permitan a los alumnos formar un objeto mental volumen[1] robusto.

Para iniciar, considero conveniente reflexionar sobre las magnitudes en general y los procesos de medición. Esto tiene que ver con el primer punto antes mencionado.

Una propiedad de los cuerpos susceptible de ser medida

Los objetos del mundo tienen diferentes cualidades, algunas son físicas, otras químicas. Algunas se perciben a simple vista o tocando o usando otros de nuestros sentidos (¿es dulce, salado, agrio?). Algunas requieren de instrumentos como el microscopio u otros aparatos para ser percibidas. Entre estas cualidades hay algunas *susceptibles de ser medidas*: la longitud, la superficie, la temperatura, la capacidad, el volumen y otras. También hay propiedades que no pueden ser medidas como el color, la textura, la forma.

- Medir es común a todas las culturas (es la tercera actividad universal de Bishop[2].
- Medir es una actividad cotidiana.
- Medir es comparar ("la necesidad de medir sólo se plantea si se quieren comparar dos o más fenómenos", Bishop, p. 56).
- Medir es asignar un número a una propiedad de un objeto.

Medir es tan común que de pronto se confunde la propiedad que estamos midiendo, la magnitud, con su medida y la cuestión se complica más aún cuando todo se mide con las mismas unidades, con el mismo sistema de medición.

Los sistemas de medidas surgen como una necesidad de regular el comercio (sobre este asunto es muy recomendable leer el hermoso libro de Kula, 1980). Estos sistemas se van refinando con el paso del tiempo y con los avances tecnológicos hasta llegar a los sistemas más utilizados en la actualidad y, entre ellos, al que nosotros, y casi todo el mundo, utilizamos: el Sistema Métrico Decimal (al que nos referiremos de aquí en adelante como SMD).

Pero las grandes ventajas de este sistema se convierten, al mismo tiempo, en un obstáculo para comprender las magnitudes. El SMD parte de una unidad de longitud: el metro, de aquí se pasa a dos dimensiones y tenemos el metro cuadrado y luego a tres y tenemos el metro cúbico. De cada una de estas unidades, por medio de potencias de diez, se obtienen los múltiplos y submúltiplos. Así, el decímetro cúbico, que corresponde a la milésima parte del metro cúbico, corresponde al litro, la unidad de capacidad del SMD; y lo que pesa un

[1] Nos referimos a *objeto mental* en el sentido que le da Freudenthal (1983) y contrapuesto a *concepto*. Los conceptos son el conocimiento ya terminado e incluido en "la enciclopedia del conocimiento universal", mientras que los objetos mentales son todas las representaciones, ideas, relaciones, significados que el concepto evoca en la mente del sujeto.

[2] Junto con contar, localizar, diseñar, jugar y explicar. (Bishop, 1999)

litro de agua (en ciertas condiciones atmosféricas) se convierte en la unidad de peso: el kilogramo o kilo. Este orden, esta secuencia, esta uniformidad es seductora, pero transmite un mensaje que no tiene que ver con el desarrollo de la medición y de los sistemas de medida, como veremos más adelante.

El SMD es una creación científica y política (de nuevo los remito a Kula, 1980) y su uso tuvo que ser implantado primero en Francia y después en otros países, no sin una cierta resistencia de parte de la población. La implantación del SMD en nuestro país requirió el apoyo de la escuela.

> Fue en 1857 cuando se publicó el decreto anunciando la adopción de este sistema de pesas y medidas (Gallardo, 1864). Este cambio no podía hacerse de un día para otro, había simpatizantes del sistema, pero también se hacían críticas relacionadas con su adopción. Por tanto, el gobierno mexicano se vio comprometido a popularizar el nuevo sistema, así como su uso. Un medio para lograr este fin sería la educación. (Sáiz, 2002, pág. 59)

La escuela era el lugar en el cual este sistema se enseñaba a las nuevas generaciones, haciéndolos olvidar aquellos otros sistemas de medición. Pero no sólo esto, la enseñanza del Sistema Métrico Decimal deja de lado los conceptos asociados a las magnitudes que han de ser medidas. De alguna manera se parte del supuesto de que todo mundo sabe lo que es la longitud, la superficie, el volumen. Lo importante es medir todo eso usando las unidades del SMD. Esto crea una cierta ilusión en cuanto a que lo primero que se debe enseñar es el metro y, por tanto, la longitud; después el metro cuadrado y por tanto el área y, por último (*last but yes least*) el volumen. Esto obedece también a una lógica matemática. Para la enseñanza de las matemáticas (por ejemplo del cálculo) primero se trabaja en una dimensión y luego en dos, luego en tres y luego en "*n*".

Hart (1984) realizó un estudio para averiguar el nivel de conocimientos básicos sobre medición en niños de 12 a 15 años. Al hacer el análisis de las respuestas dadas por los niños encontró que 70% de los alumnos que no conservaban[3] la longitud, podían responder a los problemas de conservación de área correctamente. Similarmente, 70% de los que no conservaban área podían conservar longitud. Algo parecido sucedió con algunos alumnos que mostraron conservar el volumen pero no así el área ni la longitud.

Al leer el libro de Kula (1980) y, conociendo algo de las costumbres rurales en nuestro país, podemos darnos cuenta de que las medidas de longitud, tradicionales o antiguas, no siguen el orden: longitud, área, volumen. De hecho, algunas mediciones de longitud no se basan en la comparación con una unidad de medida de longitud, sino que se relacionan con una magnitud de naturaleza totalmente distinta; la longitud de un camino se relaciona con el tiempo que tardará en recorrerse. A veces la medida se da con referencia a la posición que tendrá el sol cuando se llegue al destino. El área o la superficie de un terreno se calcula, en ocasiones, por la cantidad (volumen) de semillas que pueden sembrarse ahí de manera

[3] Se habla aquí de *conservar* en el sentido Piagetiano (ver Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960). En general el término se refiere a la capacidad de comprender que bajo ciertas transformaciones las magnitudes se conservan. Por ejemplo si un hilo no elástico se estira o se encoge; si un líquido se pasa de un recipiente a otro, etc.

óptima. Así que pensar que la longitud es la base para medir el área y el volumen es algo muy abstracto.

> Este cambio de perspectiva entre procedimientos de cálculo de volúmenes en los que el proceso involucrado consiste en un conteo eficiente de unidades de la misma naturaleza de aquello que se pretende medir y otros procedimientos, en los cuales los cálculos involucran comparaciones entre unidades de distinta naturaleza a la que se está midiendo, como son longitudes y áreas en el caso del volumen, acarrea dificultades cognitivas en el proceso de aprendizaje. (Sáiz, 2002)

Al primer tipo de los procedimientos mencionados en el párrafo anterior, se les denomina, retomando a Vergnaud (1983), unidimensionales, ya que el cálculo radica en un conteo (de unidades de volumen). Mientras al segundo se le llama bidimensionales, ya que se hacen mediciones o comparaciones de magnitudes de naturaleza diferente, tales como áreas de bases y longitudes de alturas y el resultado se obtiene mediante un producto de dos magnitudes (proceso bidimensional) cuyo resultado está dado en unidades de otra naturaleza. Podríamos ir aún más lejos y considerar que la famosa fórmula: largo por alto por ancho representa un proceso tridimensional.

Los conflictos relacionados con el paso de procedimientos unidimensionales a bidimensionales para medir el volumen, posiblemente también estén detrás del resultado de Ricco y Vergnaud (1983) sobre las dificultades detectadas, en alumnos de cuarto grado en adelante, para deducir la fórmula para obtener el volumen de un paralelepípedo; ya que, como se ha visto, no es tan natural como pareciera, el considerar medir un objeto tridimensional midiendo sus dimensiones lineales.

Dentro de la matemática formal, este cambio de dimensionalidad en relación con el cálculo del volumen se refleja a través del estudio de la integral. Entre los antecedentes de este concepto se encuentra el trabajo de Cavalieri.

Algunos autores (ver por ejemplo Boyer, 1989) consideran que el trabajo más importante del Renacimiento en cuanto al cálculo en general, y al volumen en particular, es el publicado en 1635: *Geometria indivisibilibus continuorum* de Bonaventura Cavalieri, antiguo alumno de Galileo. Su libro es considerado por algunos autores el primer libro de texto sobre lo que ahora se conoce como métodos de integración.

El método de Cavalieri para obtener volúmenes consistía en medir los sólidos que se formaban al cortar el cuerpo con planos paralelos a su base. La idea de Cavalieri era la de considerar *todos* (una infinidad) los planos paralelos a la base que cortan al cuerpo, lo que da como consecuencia una serie de sólidos infinitamente delgados. La suma del volumen de estos "sólidos" sería el volumen del cuerpo original.

Cavalieri observó que si se tienen dos o más cuerpos con la misma altura h y éstos son intersecados por cualquier plano paralelo a sus bases (formándose las figuras A_1 y A_2 como se muestra en la Figura 2.3) y si siempre las figuras formadas por la intersección de los cuerpos y el plano tienen la misma área, entonces los sólidos tienen el mismo volumen.

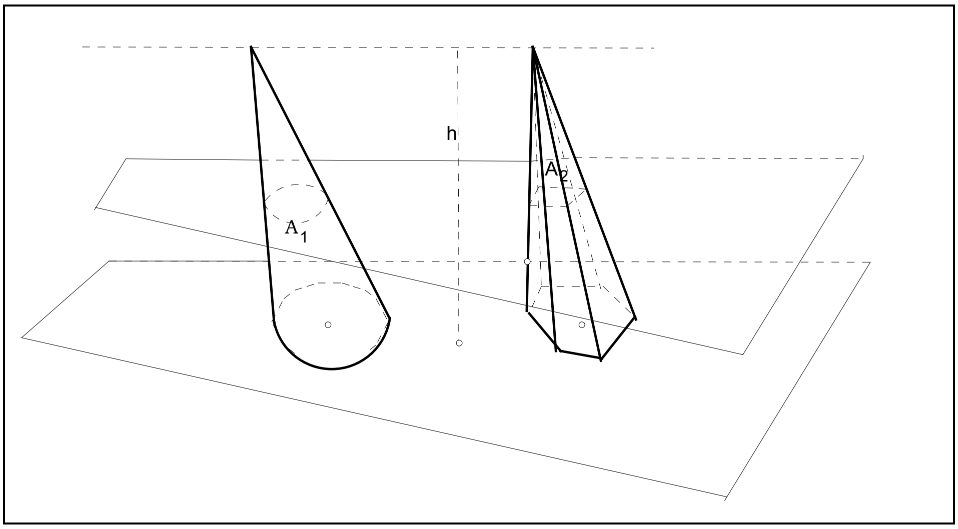


Figura 2.3 Ejemplo del uso del teorema de Cavalieri.

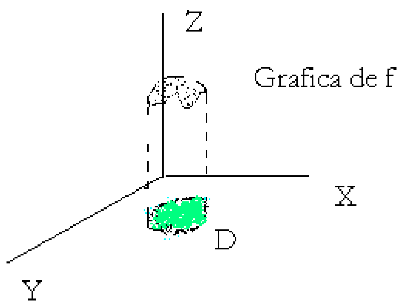
Como se observa, Cavalieri transforma el problema unidimensional de calcular un volumen en uno bidimensional (comparación de áreas y de alturas) y aprovecha conocer el volumen de un cuerpo a partir de otro cuerpo cuyo volumen es conocido. Este procedimiento se fue refinando con el tiempo hasta la forma en que se presenta hoy en los textos de cálculo diferencial e integral.

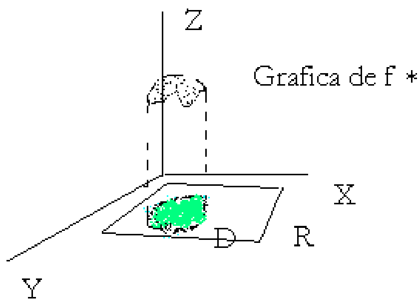
En matemáticas, el cálculo del volumen aparece como una aplicación de la integral definida, como se observa en la siguiente cita, donde el volumen se asocia al valor de la integral de una función definida sobre una región en el plano (bidimensional) con valores reales (lo que vendría a ser la altura).

Sea D una región en el plano, y R un rectángulo que contiene a D. Sea $f: R \to \Re$, continua y f^* la función tal que:

$$f^*(x,y) = f(x,y), \quad si\ (x,y) \in D \qquad \text{y} \qquad f^*(x,y) = 0\ si\ x \notin D$$

definase $\int_D f(x,y)dA = \int_R f^*(x,y)dA$.





Con esta definición, si $f(x,y) \geq 0$ en D, el valor de la integral corresponde al volumen de la región tridimensional entre la gráfica de f y D (Marsden y Tromba, 1991, pág. 331).

Dos cuestiones importantes a resaltar son:

- dentro de la matemática formal y su enseñanza, se establece el orden de una, dos, tres y más dimensiones.
- las magnitudes longitud, área y volumen se integran, para su estudio, junto con otras ideas, en lo que se conoce como teoría de la medida y así pierden sus particularidades.

Lo que se acaba de mencionar resulta de seguir el rastro del concepto de volumen a través de la historia del cálculo. Sin embargo, si el rastreo se hace por la historia de la geometría encontramos que el concepto de volumen está ligado al de los poliedros. Malkevitch (1988), al estudiar los orígenes de estos objetos geométricos, señala lo que él llama piedras angulares en este camino. Entre ellas, menciona tres relacionadas con el cálculo del volumen: una es la fórmula del volumen de una pirámide truncada que aparece en el Papiro de Moscú (1850 a.C.); otra es el conocimiento de Demócrito (500 a.C.) de que el volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura y la demostración de este hecho realizada por Eudoxo (409-356 a.C.); la tercera se refiere a las discusiones de Euclides acerca del volumen de los prismas y pirámides en el Libro XII de Los Elementos.

Estos datos nos llevan a reflexionar que la idea de calcular volúmenes por procesos bidimensionales data de casi dos mil años antes de nuestra era. Sin embargo, esto no lo hace menos abstracto.

Pero lo que quiero hacer notar al tomar el camino de la geometría para rastrear el concepto de volumen es un problema que Hilbert, en 1900, observó. Él se dio cuenta de que en geometría plana, una vez obtenido el área del rectángulo, el área de cualquier figura poligonal puede ser calculada partiéndola en un número finito de pedazos, y reacomodándolos para obtener otra figura poligonal cuya área sea conocida.

Al procedimiento de dividir una figura poligonal en un número finito de figuras poligonales y volverlas a acomodar para formar otra, se le conoce como equidescomponibilidad. La figura original y la obtenida finalmente se dice que son equidescomponibles. El resultado general que relaciona esta definición con el área dice: dos figuras poligonales equivalentes (que tienen la misma área) son equidescomponibles y viceversa.

El resultado anterior tiene una aplicación importante en la vida real y en la enseñanza del cálculo de áreas, ya que, para calcular el área de cualquier figura poligonal, ésta puede descomponerse adecuadamente en otra figura con la misma área. Una vez conocida la fórmula para encontrar el área del rectángulo, por equidescomponibilidad se obtiene la de los triángulos y, como todas las figuras poligonales pueden dividirse en triángulos, una vez conocida el área del rectángulo, es posible calcular el área de cualquier figura poligonal.

Pero en el caso del volumen esto no sucede. Hilbert observa que el método de equidescomponibilidad para calcular volúmenes no parecía aplicable siempre en tres dimensiones. Desde Euclides, todos los que obtenían el volumen de un tetraedro, lo hacían a través de un proceso de límite. La pregunta natural era entonces si esto se debía a mala suerte de no encontrar cómo descomponer el tetraedro y reacomodar las piezas para obtener otro cuerpo de volumen conocido, o se debía a que la generalización en tres dimensiones del resultado para polígonos no era válida. Esto es ¿existen poliedros equivalentes (con el mismo volumen) que no son equidescomponibles?

Hilbert lo plantea de esta manera: exhibir dos tetraedros con bases equivalentes y alturas iguales que de ninguna manera puedan descomponerse y reacomodarse para formar dos tetraedros congruentes. Este planteamiento es el tercer problema de Hilbert, mismo que fue resuelto por Dehn el mismo año de su planteamiento. Con esto quedaba probado que no hay manera de deducir la fórmula general para obtener el volumen de una pirámide a partir de la fórmula para obtener el volumen de un prisma usando los métodos de descomposición (que funcionan en el caso de las áreas).

Este resultado tiene un efecto en la educación secundaria, dicha fórmula no puede formalizarse más que a través de un proceso de límite. Boltianskii (1978) llama la atención sobre esta situación y comenta que de los 23 problemas propuestos por Hilbert, sólo el tercero está relacionado con la enseñanza de la geometría en secundaria.

Como se desprende de los párrafos anteriores, si bien el volumen, como la longitud y el área, es una cualidad de los cuerpos susceptible de ser medida y por tanto comparte propiedades comunes a todas las magnitudes; también tiene cualidades que lo identifican y lo convierten en un concepto que se debe enseñar de manera independiente a la longitud y al área, no como una extensión de éstos.

También hemos visto que el orden: longitud luego área luego volumen, elegido para la enseñanza de la medición en todos los niveles y en todas las épocas, no es natural y que esto se percibe cuando se estudian y analizan los sistemas de medición antiguos y tradicionales y se refleja en investigaciones actuales realizadas con niños.

A continuación centraré la atención en estudios de tipo psicológico o cognitivo, aunque aquí ya hemos hecho referencia a este tipo de estudios y a posibles implicaciones cognitivas derivadas de resultados obtenidos de un análisis del concepto matemático de volumen.

La conservación de la sustancia

En la sección anterior se comentó acerca del problema de Hilbert. Este problema hace énfasis en la imposibilidad de tener un método general para obtener un volumen a partir del conocimiento de la fórmula para obtener el volumen de un paralelepípedo, lo que sería una situación análoga al caso del área, donde una vez obtenida la fórmula para calcular el área de un rectángulo, se calcula la del triángulo por descomposición y de aquí la de cualquier región plana.

Este proceso de descomponer y recomponer es una transformación que se aplica a la región cuya área hay que obtener, pero para estar de acuerdo con que el proceso es correcto es necesario comprender que la transformación aplicada a la figura original *conserva* el área.

Piaget se dio cuenta de la importancia de la idea de conservación de la cantidad y la sustancia para la formación de algunos conceptos matemáticos y dedicó mucho de su trabajo a ello. Posteriormente su trabajo ha sido replicado, criticado y/o adaptado, pero su valor sigue siendo de importancia para aquellos interesados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por ello iniciamos comentando algunas de las aportaciones de Piaget en relación con el concepto de volumen y de su enseñanza.

Una contribución que considero importante se relaciona con los significados que los niños atribuyen al vocablo volumen. Piaget Inhelder y Szeminska (1960) distinguen tres significados diferentes. Tan diferentes que las edades para las que se logra la conservación de cada uno de ellos es distinta. Los significados son:

- Volumen interno (la cantidad de unidades de material que conforman un cuerpo)
- Volumen ocupado (la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos del entorno)
- Volumen desplazado (el volumen de agua desplazado por un cuerpo que se sumerge en este líquido)

Para el volumen interno, de acuerdo con Piaget, Inhelder y Szeminska (1960) la conservación se logra entre los siete y los once años; mientras que para los otros dos significados, las edades señaladas para su conservación son de 12 a 13 años. Esta diversidad de significados y de edades para su conservación marca otra diferencia con la longitud y el área, además de las que ya se habían comentado en la sección anterior.

El trabajo de Piaget ha sido replicado, modificado y criticado por diferentes autores. Pero es el punto de partida de la mayoría de las investigaciones hechas con niños en torno a diferentes conceptos relacionados con la medición.

Entre otros, Lunzer, y Novell y Ogilvie, y Carpenter (citados por Stefee y Hirstein, 1976) hicieron investigaciones basadas en las tareas piagetianas de conservación del volumen y llegaron a conclusiones semejantes a las de Piaget.

Hiebert y Carpenter (1982) hacen algunos estudios sobre la conservación y el aprendizaje de la medición y concluyen que la conservación no es un requisito para aprender conceptos relacionados con la medición y recomiendan trabajar la medición de diferentes magnitudes con los niños aun cuando todavía no sean conservadores.

Más recientemente Hart (1984) y su equipo aplican un cuestionario sobre varios temas matemáticos a estudiantes de 12 a 15 años de edad. Para el volumen, la mayoría de las preguntas son adaptaciones de las tareas piagetianas a un cuestionario de lápiz y papel. Sobre estas preguntas sus conclusiones es que algunos de estos niños tienen problemas con la conservación del volumen.

Además de la conservación, otros problemas detectados con relación al aprendizaje del volumen tienen que ver con las relaciones entre el volumen y otras magnitudes como el área lateral, la capacidad y el peso. Sobre el área lateral Enochs y Gabel (1983) realizan un estudio con futuros maestros de primaria y encuentran que muchos de ellos no distinguen volumen de área o los confunden. Ricco y Vergnaud (1983) observan este mismo comportamiento en niños de cuarto grado de primaria.

Janvier (1994) subraya el problema de la confusión entre capacidad y volumen. Al respecto Sáiz (2002) encontró que los maestros de primaria también están confundidos respecto a lo que une y a lo que separa los conceptos capacidad y volumen. Ella considera que el problema disminuiría si, cada vez que se va a trabajar con alguna magnitud, se hace hincapié en los objetos susceptibles de ser medidos respecto a dicha magnitud. Para ella es importante que los alumnos se den cuenta de la diferencia entre los objetos susceptibles de ser medidos respecto al volumen (cualquier objeto de nuestro mundo) y los objetos susceptibles de ser medidos respecto a la capacidad (sólo los recipientes).

Sobre el peso, se han reportado resultados que indican que algunas personas relacionan el cambio en ele nivel de líquido, al sumergir un cuerpo en él, al peso y no al volumen. Sáiz (2002) reporta otros errores cometidos por maestros sobre la relación peso-volumen. Ya que una vez que los maestros han llegado a la conclusión de que es el volumen y no el peso lo que se mide cuando se usa inmersión, esto los lleva a pensar que no hay ninguna relación entre el peso y el volumen, ni siquiera cuando se trata de cuerpos hechos con el mismo material.

Respecto a los objetos volumen medibles, Potari y Spiliotopoulou (1996) hacen un estudio en el que reportan cómo la forma y estado del cuerpo a medir influyen en la noción de volumen de los niños. A juicio de estos investigadores, la visión geométrica del volumen se enfoca en la medición, en particular, en el resultado numérico, y despoja al objeto de sus características físicas. Ellos ponen atención en tales características de los cuerpos. Sus experimentos incluyen cuerpos sólidos, cuerpos huecos de plástico, modelos huecos de papel, recipientes abiertos y cerrados, vacíos y llenos.

Algunas de los resultados de estos investigadores son que los niños de quinto grado de primaria dan significados diferentes al término volumen de acuerdo con características físicas de los cuerpos que se les presentan. Al comparar dos cubos idénticos, uno de papel hueco y otro sólido de madera, algunos niños le dan a volumen el significado de capacidad y concluyen que el objeto hueco es mayor (al otro no le cabe nada); otros le dan al término el significado de masa o material con el que está hecho, en ese caso dicen que el mayor es el de madera. Lo mismo ocurre cuando el significado asociado es peso. Cuando el significado asociado es el de volumen como espacio ocupado dicen que ambos cubos tienen el mismo volumen.

La intención de estas reflexiones es subrayar la complejidad del concepto volumen Lo mencionado en los puntos precedentes permite concluir tal y como Potari y Spiliotopoulou (1996) lo hacen en su artículo:

> Vergnaud (1990) afirma que el concepto volumen está formado por diferentes propiedades y relaciones con otros conceptos matemáticos [...]. También está relacionado con conceptos físicos como la cantidad, la naturaleza de la materia y el peso. Esta complejidad explica la diversidad de concepciones expresadas por los niños ... (*Ibid*., págs. 356-357).

Análisis fenomenológico didáctico

Por último, nos referiremos a las recomendaciones de expertos para la enseñanza del volumen. Como veremos, los resultados de investigaciones psicológicas y de un análisis matemático del concepto volumen influyen en los modelos de enseñanza propuestos.

Freudenthal (1983) es uno de los críticos más fuertes de Piaget. Su crítica radica, fundamentalmente, en que para Freudenthal no se debe iniciar una investigación sobre un concepto matemático si no se le ha aplicado antes al concepto en cuestión un análisis fenomenológico[4]. Así, él aplica un análisis fenomenológico a muchos conceptos matemáticos y también lo que denomina análisis fenomenológicos didácticos. Para el volumen, algunas de las actividades que considera indispensables para la formación del objeto mental volumen son las siguientes:

1) Hacer muchas transformaciones con sólidos, semillas, harinas y líquidos, como moldear, verter, transformaciones de romper y rehacer[5], sumergir en líquidos y otras.
   a) Aprovechar este para hacer hincapié en la diferencia entre volumen y área,
   b) diferenciar capacidad y volumen,
   c) observar la aditividad[6] del volumen.
2) Hacer repartos justos (de pan, masa, plastilina, líquido)
   a) Aprovechando regularidades de los cuerpos
   b) Estimando
   c) Midiendo
3) Comparar y reproducir (con otra forma)
   a) Comparando bases y luego alturas
   b) Por inclusión (si es posible)
   c) Por estimación
   d) Por medición
   e) Usando transformaciones que conserven el volumen
4) Medir
   a) Por exhaución con una unidad y afinando la medición con subunidades
   b) Con transformaciones de romper y rehacer
   c) Por relaciones geométricas conocidas
   d) Por medio de fórmulas
   e) Por inmersión
5) Otras cosas
   a) Construir cuerpos de igual área y volúmenes diferentes

[4] Freudenthal (1983) lo explica con estas palabras: "Fenomenología de un concepto matemático, estructura, o idea significa describirla en su relación con los fenómenos para los que fue creado, y a los que ha sido extendido en el proceso de aprendizaje de la humanidad, y, hasta donde esta descripción esté relacionada con el proceso de la joven generación, se trata de fenomenología didáctica, una manera de mostrar al maestro los lugares en los que el aprendiz puede detenerse en el proceso de enseñanza de la humanidad" (pág. 1).

[5] Freudenthal (1983) las denomina *break make-transformations* y se refiere, por ejemplo, a hacer una construcción con cubos, deshacerla y volverla a hacer.

[6] Si un cuerpo se descompone en dos cuerpos que no se intersecan, el volumen del cuerpo original es igual a la suma de los volúmenes de los dos cuerpos obtenidos por la descomposición.

b) Construir cuerpos de igual volumen pero diferentes áreas
c) Observar el efecto de multiplicar por un factor k las magnitudes lineales de un cuerpo

Para Freudenthal, dentro de más variedad haya en las actividades realizadas en clase, mejor será el resultado.

Analizando el modelo de enseñanza mexicano a partir de las recomendaciones de Freudenthal, de otros expertos (véase por ejemplo, Del Olmo, Moreno y Gil, 1996) y de lo que se desprende de resultados relacionados con aspectos formales del volumen desde la disciplina misma y de los procesos cognitivos, considero que el eje de medición plasmado en los planes y programas de primaria y secundaria tiene dos características importantes:

1. En la primaria, el tratamiento dado a algunas magnitudes es más variado y completo que el dado a otras. La longitud y el área dan un espacio a la percepción y a las transformaciones que las dejan invariantes. En estas magnitudes hay también mucho trabajo con unidades no convencionales. Sin embargo, no es el caso del volumen. El estudio de este contenido se inicia en cuarto grado, pero sólo hay una lección que trata la medición de volúmenes con unidades no convencionales (lección 10 del bloque 4). En quinto y sexto hay algunas más, la mayoría centradas en el cálculo de volúmenes de paralelepípedos aplicando la fórmula y usando unidades convencionales.

2. En primaria y secundaria se trabaja muy poco la estimación de magnitudes (sobre este tema vale la pena leer a Bright, 19), la estimación del volumen no es un contenido a tratar. Esta es quizás una carencia que el maestro debe remediar ya que la estimación es una actividad importante y útil, la cual puede dar mucho sentido al aprendizaje de los conceptos de medición.

Reflexiones finales

Este documento lo escribí con el ánimo de apoyar a los maestros en su práctica profesional, particularmente en la enseñanza de la medición en general y del volumen en particular. De alguna manera quise traer resultados de investigación al aula, exponiéndolos de manera sencilla a los maestros.

Aunque es muy difícil sintetizar todas las deducciones obtenidas por diferentes investigadores en relación con el concepto de volumen, he intentado mostrar un abanico con algunos resultados que considero relevantes y mi intención ha sido provocar el deseo de tener un acercamiento a los documentos que reportan diferentes investigaciones y sus conclusiones; no sólo acerca del volumen, sino de otros muchos contenidos matemáticos.

Algunas de las afirmaciones que aparecen en este texto son ideas personales. Ideas que son producto de una reflexión que me ha llevado años: pensar y volver a pensar, leer y volver a leer, analizar y volver a analizar. Lo que quiero decir con esto es que me ha llevado mucho tiempo comprender algunas de las ideas que he expresado aquí. Esto es, formar un objeto volumen sólido y rico lleva muchos años, mucho trabajo y es un proceso que no se termina nunca. Espero cada día seguir enriqueciendo toda la red de definiciones, significados y relaciones que conforman mi objeto mental volumen. En esta exposición he intentado dejar ver un poco de esta riqueza y complejidad. Si logro despertar un poco de interés y curiosidad por este concepto, habré logrado mi meta.

Bibliografía

Bishop, A. (1999) *Enculturación Matemática*. Barcelona: Paidós

Boltianskii, V. G. (1978). *Hilbert's third problem*. Washington, EE.UU.: V.H. Winston & Sons.

Boyer, C. B. (1989). The history of the Calculus en Baumgart, John K. *et al*. (Eds.). *Historical Topics for the Mathematical Classroom*. Virginia, EE.UU.: NCTM.

Bright, G. (1976). Estimation as part of learning to measure en *Yearbook Measurement in School Mathemetics*, (págs. 87–104). Reston, Virginia, USA: NCTM.

Del Olmo, M. A., Moreno, F., y Gil, F.(1989). *Superficie y Volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid, España: Síntesis.

Enochs L. G. y Gabel, L.D. (1984). Preservice Elementary Teachers' Conceptions of Volume. *School Science and Mathematics, 84* (8): 670–680.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, Holanda: Reidel Pub. Co.

Gallardo, C. (1864). El sistema Métrico Decimal. *Periódico Oficial del Imperio Mexicano 142*: 1–3.

Hart, K. (1984). Which comes first –Length, area, or volume? *Arithmetic Teacher, 31* (9): 16–27.

Hiebert, J. y Carpenter, T.P. (1982). Piagetian tasks as readiness measures in mathematical instruction. A critical review. *Educational Studies in Mathematics 13*: 329–345.

Janvier, C. (1994). *Le volume. Mais où sont les formules*. Quebec: Modulo Editeur, Mont Royal.

Kula, W. (1980). *Las medidas y los hombres*. México: Siglo XXI Editores.

Malkevich, J. (1988). Milestones in the History of Polyhedra en *Shaping Space a Polyhedral Approach*. MA, EUA: Birkhäuser Boston Inc.

Marsden, J.E. y Tromba, A.J. (1991). *Cálculo Vectorial*. EE.UU.: Addison Wesley Iberoamericana.

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1970). *The child's conception of geometry*. Londres, GB: Routledge and Kegan Paul.

Potari, D. y Spiliotopoulou, V. (1996). Children´s approaches to the concept of volume. *Science Education 80* (3): 341–360.

Ricco, G y Vergnaud, G.. (1983). Représentation du volume et arithmetisation. Entretiens individuels avec des élèves de 11 a 15 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4* (1): 27–69.

Sáiz, M. (2002). *El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto matemático volumen y su enseñanza*. Tesis doctoral. Departamento de Matemáticas Educativas, Cinvestav, México.

Steffe, L. y Hirstein, J. (1976). Children's thinking in measurement situations en *Measurement in School Mathemetics*. Virginia, EE.UU.: NCTM.