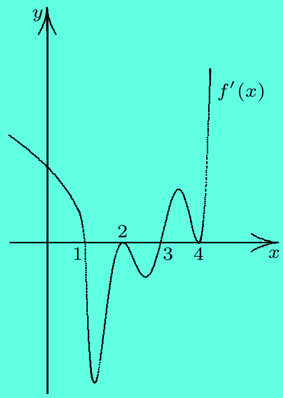
PROBLEMARIO

Álgebra, Geometría y Cálculo



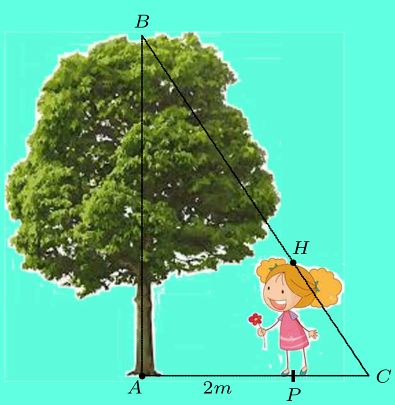
$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$$

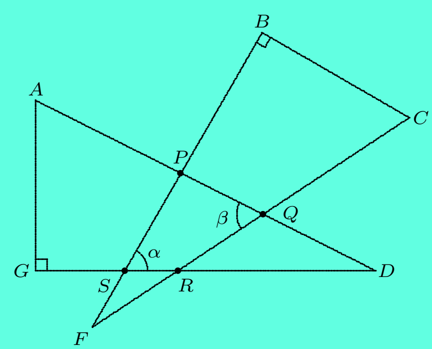
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1+\sec x}{3\tan x}$$

$$\left(1+\tfrac{1}{1}\right)\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\tfrac{1}{n}\right) = n+1$$

$$\tfrac{1}{\sqrt{1}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\tfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\tfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$





CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Edición 2017

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Área de Tecnologías Digitales en Educación Matemática

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS

Álgebra, Geometría y Cálculo

ISBN: 978-607-9023-46-1

Ernesto A. Sánchez Sánchez
Gonzalo Zubieta Badillo
Claudia Acuña Soto
Diana Maya

Susana Cristina Martínez Sánchez

Problemario

Ernesto A. Sánchez Sánchez
Gonzalo Zubieta Badillo
Claudia Acuña Soto
Diana Maya
Susana Cristina Martínez Sánchez

Primera edición
2017

D.R. © Centro de Investigación y
de Estudios Avanzados del I.P.N. (Cinvestav)
Av. I.P.N. 2508
07360, Ciudad de México
www.cinvestav.mx

Editor
Cinvestav-Departamento de Matemática Educativa,
Av. I.P.N. 2508
07360, Ciudad de México
www.matedu.cinvestav.mx

versión pdf
ISBN: 978-607-9023-46-1

ISBN: 978-607-9023-46-1

Las denominaciones empleadas y la presentación del material en esta publicación no implican la expresión de opinión alguna por parte del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. (Cinvestav), sobre la condición jurídica de los territorios aquí analizados, o de sus autoridades, ni respecto de la delimitación de sus fronteras o límites o sobre su sistema económico o grado de desarrollo.

NINGUNA PARTE DE ESTA OBRA PUEDE SER REPRODUCIDA O TRANSMITIDA MEDIANTE NINGÚN SISTEMA O MÉTODO ELECTRÓNICO O MECÁNICO (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO, LA GRABACIÓN O CUALQUIER SISTEMA DE RECUPERACIÓN Y ALMACENAMIENTO DE INFORMACIÓN) SIN CONSENTIMIENTO POR ESCRITO DEL TITULAR.

Introducción.

El presente trabajo está basado prácticamente en su totalidad, en la colección de ejercicios y problemas compilados en el *Problemario*, obra editada por los doctores Ernesto Sánchez y Gonzalo Zubieta, la doctora Claudia Acuña y Diana Maya, del Departamento de Matemática Educativa (DME) del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav).

En esta edición 2017 se ha hecho una revisión muy minuciosa de los problemas y ejercicios presentados, modificando lo necesario con la intención de eliminar los errores detectados, buscar que los enunciados planteen claramente los cuestionamientos y enriquecer la presentación, cuando es posible, con figuras elaboradas cuidadosa y meticulosamente. Cabe aclarar que en el afán de asegurar que todos y cada uno de los ejercicios puede resolverse, se ha elaborado el cien por ciento de las soluciones incluyendo en cada una, cuando así lo amerita, todas las explicaciones pertinentes.

El objetivo es ofrecer una versión mejorada y reforzada del *Problemario* como un recurso utilizable por los estudiantes de las diferentes áreas del DME, y en particular para aquellos estudiantes que, como se menciona en la presentación del *Problemario* (2003), "la mayoría de los problemas represente un verdadero reto, sólo superable con un gran esfuerzo." Este material busca motivar dicho esfuerzo para aportar un granito de arena en la tarea de tratar de solventar algunas de las dificultades que presentan los estudiantes en relación a su formación previa. Por otro lado, también se ofrece este material, por supuesto acompañado de las soluciones mencionadas, bajo la consideración de que podría ser aprovechado como apoyo en algunos de los cursos que se imparten en el DME.

Se hace una cordial invitación a dirigir al correo de la suscrita sus observaciones y comentarios que serán bienvenidos y muy apreciados en pro de hacer continua la tarea de corregir y enriquecer este material a favor de ofrecer siempre mejores versiones.

Susana C. Martínez Sánchez
smartin@cinvestav.mx

ISBN: 978-607-9023-46-7

ISBN: 978-607-9023-46-1

Índice

ISBN: 978-607-9023-46-1

ISBN: 978-607-9023-46-1

I. Álgebra

I.1. Razones

1. Encuentra dos números en la razón de $7:12$ tales que el mayor exceda en 275 unidades al menor

2. Si $x:y=3:4$, encuentra la razón de $(7x-4y):(3x+y)$.

3. Si $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$, prueba que:

$$\frac{a}{d}=\sqrt{\frac{a^5+b^2c^2+a^3c^2}{b^4c+d^4+b^2cd^2}}$$

4. Si $\frac{x}{q+r-p}=\frac{y}{r+p-q}=\frac{z}{p+q-r}$, demuestra que:

$$(q-r)x+(r-p)y+(p-q)z=0$$

I.2. Proporciones

5. Encuentra:

   a) La cuarta proporcional a 3, 5 y 27.
   b) La media proporcional entre 6 y 24.
   c) La tercera proporcional a $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ y $\frac{x}{y}$.

6. Si $a:b=c:d$, demuestra que:

$$(a^2c+ac^2):(b^2d+bd^2)=(a+c)^3:(b+d)^3$$

7. Encuentra cuatro números proporcionales tales que la suma de los extremos sea 21, la suma de los medios 19 y la suma de los cuadrados de los cuatro números sea 442.

8. Dos barriles, A y B, se llenaron con jerez de dos clases diferentes, mezclados en el barrilo A en la razón $2:7$ y en el barril B en la razón $1:5$. ¿Qué cantidad debe tomarse de cada uno para formar una mezcla que contenga 6 litros de una clase y 27 de la otra?

ISBN: 978-607-9023-46-1

9. Se han sacado nueve litros de un barril lleno de vino, después se ha rellenado el barril con agua. De esta mezcla se sacan nueve litros más y se vuelve a rellenar el barril con agua. Si la cantidad de vino que queda en el barril es a la cantidad de agua que se ha añadido como 16 es a 9, ¿qué capacidad tiene el barril?

I.3. Progresiones Aritméticas

Se dice que una serie de números está en *progresión aritmética* cuando cada uno de sus términos es igual al anterior más una cantidad constante llamada *diferencia* de la progresión.

10. Encuentra la suma del número de términos especificado en cada una de las siguientes progresiones aritméticas:
    a) Sumar 17 términos: 49, 44, 39, ...
    b) Sumar 19 términos: $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \ldots$
    c) Sumar 24 términos: $-7\frac{1}{2}, -7, -6\frac{1}{2}, \ldots$
    d) Sumar 50 términos: $\frac{6}{\sqrt{3}}, 3\sqrt{3}, \frac{12}{\sqrt{3}}, \ldots$
11. En una progresión aritmética el primer término es 2, el último 29 y la suma 155. Encuentra la *diferencia* de la progresión.
12. La suma de tres números en progresión aritmética es 27 y su producto 504. Encuentra dichos números.
13. Calcula la suma de p términos de la progresión cuyo n-ésimo término es $\frac{n}{a} + b$.
14. Calcula la suma de n términos de la progresión:

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}}, \frac{1}{1-x}, \frac{1}{1-\sqrt{x}}, \ldots$$

ISBN: 978-607-9023-46-1

I.4. Progresiones Geométricas

Se dice que una serie de números está en *progresión geométrica* cuando cada uno de sus términos es igual al anterior multiplicado por un *factor constante*.

15. Encuentra la suma del número de términos especificado en cada una de las siguientes progresiones geométricas:

    a) Sumar 7 términos: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$
    b) Sumar 10 términos: $2\,, -4\,, 8\,, \ldots$
    c) Sumar 12 términos: $1\,, \sqrt{3}\,, 3\,, \ldots$
    d) Sumar 7 términos: $-\frac{1}{\sqrt{2}}\,, -2\,, -\frac{8}{\sqrt{2}}\,, \ldots$

16. La suma de los 6 primeros términos de una progresión geométrica es igual a 9 veces la suma de los tres primeros términos. Encuentra la razón.

17. El quinto término de una progresión geométrica es 81 y el segundo 24. Escribe la serie.

18. En una progresión geométrica el primer término es 7, el último es 448 y la suma 889. Encuentra la razón.

19. Encuentra la suma de n términos de la serie:

$$1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$$

20. Calcula la suma de n términos de la serie:

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots$$

21. Si la media aritmética entre a y b es el doble de su media geométrica, demuestra que:

$$a : b = (2 + \sqrt{3}) : (2 - \sqrt{3})$$

ISBN:978-607-3023-46-1

I.5. Progresiones Armónicas

Se dice que tres números a, b y c están en *progresión armónica* cuando:

$$\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$$

22. Prueba la siguiente proposición: "*Los recíprocos de números que están en progresión armónica forman una progresión aritmética.*"

23. Interpola dos medios armónicos entre 5 y 11.

24. Interpola cuatro medios armónicos entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{2}{13}$.

25. Si a, b y c están en progresión armónica, demuestra que:

$$a : (a-b) = (a+c) : (a-c)$$

26. Si b es el medio armónico entre a y c, demuestra que:

$$\frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

ISBN: 978-607-9023-46-1

I.6. Series

27. Encuentra la suma de n términos de cada una de las siguientes series:

   a) $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \cdots$
   b) $\frac{1}{1\cdot4} + \frac{1}{4\cdot7} + \frac{1}{7\cdot10} + \cdots$
   c) $\frac{1}{1\cdot4\cdot7} + \frac{1}{4\cdot7\cdot10} + \frac{1}{7\cdot10\cdot13} + \cdots$
   d) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \cdots$

28. Encuentra la suma de n términos de cada una de las siguientes series:

   a) $1\cdot2\cdot3\cdot4 + 2\cdot3\cdot4\cdot5 + 3\cdot4\cdot5\cdot6 + \cdots$
   b) $1\cdot4\cdot7 + 2\cdot5\cdot8 + 3\cdot6\cdot9 + \cdots$
   c) $1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot10 + 3\cdot7\cdot11 + \cdots$
   d) $1\cdot3\cdot2^2 + 2\cdot4\cdot3^2 + 3\cdot5\cdot4^2 + \cdots$

I.7. Ecuaciones Cuadráticas

29. Forma las ecuaciones cuyas raíces son:

    a) $-\frac{4}{5}$ y $\frac{3}{7}$.

    b) $\frac{m}{n}$ y $-\frac{n}{m}$.

    c) $7 \pm 2\sqrt{5}$

    d) $\frac{p-q}{p+q}$ y $-\frac{p+q}{p-q}$.

30. Encuentra los valores de m para que la ecuación: $x^2 - 15 - m(2x-8) = 0$ tenga raíces iguales.

31. ¿Para qué valores de m las raíces de la ecuación:

$$\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m-1}{m+1}$$

    serán iguales en magnitud pero de signos contrarios?

32. Si α y β son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, encuentra los valores:

    a) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

    b) $\alpha^4\beta^7 + \alpha^7\beta^4$

    c) $\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2$

33. Si α y β son las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$, forma la ecuación cuyas raíces son: $(\alpha-\beta)^2$ y $(\alpha+\beta)^2$.

34. Determina los límites entre los cuales puede variar n para que la ecuación:

$$2ax(ax + nc) + (n^2 - 2)c^2 = 0$$

    tenga raíces reales.

35. Demuestra que $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ está entre 3 y $\frac{1}{3}$ para todos los valores reales de x.

36. Encuentra la ecuación cuyas raíces son: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a-b}}$.

ISBN: 978-607-9023-46-1

I.8. Combinatoria

37. De cuántas maneras puede seleccionarse una consonante y una vocal de la palabra "*cautivo*"?

38. Si el cuádruple de un número de combinaciones de n objetos tomados de 3 en 3 es igual al quíntuplo del número de combinaciones de $n-1$ objetos tomados de 3 en 3, encuentra n.

39. En el consejo de una ciudad hay 25 consejeros y 10 oficiales. ¿Cuántos comités pueden formarse si deben constar de 5 consejeros y 3 oficiales?

40. Encuentra el número de ordenaciones que pueden hacerse con las letras de las palabras:

    a) independencia
    b) supersticioso
    c) instituciones

41. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ordenarse 17 bolas de billar si 7 son negras, 6 son rojas y 4 son blancas?

42. Tenemos n objetos diferentes que vamos a repartir entre cierto número de individuos sin restricción respecto al número de objetos que puede recibir cada uno:

    a) ¿De cuántas maneras se pueden repartir 3 cosas entre dos personas?
    b) ¿De cuántas maneras pueden repartirse una almendra, una nuez, un pistache, un cacahuate y una avellana entre dos ardillas?
    c) ¿De cuántas maneras pueden repartirse n cosas diferentes entre p personas?

43. Encuentra el número de triángulos que pueden formarse uniendo tres puntos no alineados de un polígono de 15 lados.

44. ¿Cuántas soluciones enteras positivas tiene la ecuación: $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$?

45. Cada uno de dos vértices de un triángulo es conectado mediante una recta a n puntos del lado opuesto a él, ¿en cuántas partes dividen esas $2n$ lineas el interior del triángulo?

ISBN: 978-607-9023-46-1

I.9. Teorema del Binomio

46. Encuentra el desarrollo de los siguientes binomios:

    a) $(x-1)^8$
    b) $(2xy^2 - 3xy^2)^5$
    c) $(a-b)^{10}$
    d) $(1+1)^{10}$

47. Encuentra el coeficiente de x^4 en el desarrollo de:

$$(1+x^2)^2 + (1+x^2)^3 + (1+x^2)^4 + (1+x^2)^5$$

una vez que se hayan reducido los términos semejantes.

48. Usa el Teorema del Binomio para evaluar las siguientes sumas:

    a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$
    b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$
    c) $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$
    d) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}, \qquad (n \geq 1)$

49. Usa el Teorema del Binomio para evaluar las siguientes sumas:

    a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \cdots$
    b) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \cdots \qquad (n \geq 1)$
    c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \cdots$

ISBN: 978-607-9023-46-1

I.10. Desigualdades

50. Resuelve las siguientes desigualdades:

    a) $\dfrac{x-4}{x+3} \leq 0$

    b) $\dfrac{x+3}{x-5} > 0$

    c) $|2x+9| \geq 3$

    d) $|x-2| < 3$

51. Representa en el plano coordenado los siguientes conjuntos:

    a) $(x-3)(y-3) > 0$

    b) $\dfrac{x-y}{y-1} = 0$

    c) $|3x+y| \cdot |y-x| > 0$

52. Prueba que la media aritmética es mayor o igual que la media geométrica, es decir:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad \forall a\,,\, b \in \mathbb{R}\,,\; a \geq 0\,,\; b \geq 0$$

53. $\forall a\,,\, b\,,\, c\,,\, x\,,\, y \in \mathbb{R}\,,$ demuestra que

    a) $(ab+xy)(ax+by) \geq 4abxy$

    b) $(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$

54. Si $a^2+b^2=1$ y $x^2+y^2=1$, para $a\,,\, b\,,\, x \in \mathbb{R}$, demuestra que $ax+by \leq 1$.

55. Si n es un entero positivo mayor que 2, demuestra que:

$$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$$

ISBN: 978-607-9023-46-1

I.11. Números Complejos

56. Construye en el plano complejo los puntos que representan los siguientes números:

a) $z_1 = 1$	b) $z_2 = i$	c) $z_3 = -i$
d) $z_3 = 1 + i$	e) $z_5 = i\sqrt{2}$	f) $z_6 = 2(1 + i)$

57. Si a es un punto en el plano complejo, construye los puntos representados por:

a) $-a$	b) $\overline{a}$	c) $\dfrac{1}{a}$
d) $\dfrac{1}{\overline{a}}$	e) $a + \overline{a}$	f) $a - \overline{a}$
g) ia	h) $\dfrac{a}{\overline{a}}$	i) $\dfrac{\overline{a}}{a}$

58. De los siguientes números, ¿cuáles son reales puros y cuáles imaginarios puros?

a) $z + \overline{z}$	b) $z - \overline{z}$	c) $z\overline{z}$
d) $z^2 - \overline{z}^2$	e) $\dfrac{\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}}\right)(z + \overline{z})}{(z - \overline{z})}$	f) $z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1}$

59. Encuentra las raíces cuadradas de los números:

    a) i
    b) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
    c) $-1 + i\sqrt{24}$
    d) $x^2 - 1 + i \cdot 2x$, x real

60. Expresa en forma trigonométrica las raíces de las siguientes ecuaciones:

    a) $x^4 = -16i$
    b) $x^4 = 1 + i$
    c) $x^3 = 1 - i$

61. Dibuja en el plano complejo los puntos que representan las raíces de las siguientes ecuaciones:

ISBN: 978-607-9023-46-1

a) $z^2 - 1 = 0$	b) $z^2 + 1 = 0$	c) $z^3 - 1 = 0$
d) $z^3 + 1 = 0$	e) $z^4 - 1 = 0$	f) $z^4 + 1 = 0$

62. La ecuación del ejercicio 63 es equivalente a cualquiera de las siguientes ecuaciones. Demuéstralo.

    a) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

    b) $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

    c) $(b-c)^2 = (c-a)(a-b)$

    d) $(c-a)^2 = (b-c)(a-b)$

    e) $(a-b)^2 = (b-c)(c-a)$

    f) $(b-c)(c-a) + (c-a)(a-b) + (b-c)(a-b) = 0$

    g) $\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix} = 0$

63. Prueba el siguiente teorema:

    Una condición necesaria y suficiente para que tres puntos, digamos a, b y c, sean los vértices de un triángulo equilátero es que satisfagan la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0$$

ISBN: 978-607-9023-46-1

64. Si a, b y c, son números de módulo 1 y si hacemos:

$$S_1 = a + b + c\,, \qquad S_2 = ab + bc + ca \quad \text{y} \quad S_3 = abc$$

    i) Muestra que se cumplen cada una de las siguientes igualdades:

a) $\overline{S_1} = \dfrac{S_2}{S_3}$	d) $\overline{S_1} = \dfrac{\overline{S_2}}{\overline{S_3}}$	g) $\left\lvert \dfrac{S_2}{S_1} \right\rvert = 1$
b) $\overline{S_2} = \dfrac{S_1}{S_3}$	e) $\overline{S_2} = \dfrac{\overline{S_1}}{\overline{S_3}}$	
c) $\overline{S_3} = \dfrac{1}{S_3}$	f) $S_1\overline{S_1} = S_2\overline{S_2}$	

ii) Muestra también que el triángulo con vértices a, b y c, es equilátero si:

$$S_1^2 = 3S_2$$

65. Muestra que las raíces de la ecuación cúbica:

$$z^3 + 3a_1 z^2 + 3a_2 z + a_2 = 0$$

forman un triángulo equilátero si: $a_1^2 = a_2$.

Muestra que el origen y las raíces de la ecuación:

$$z^2 + pz + q = 0$$

forman un triángulo equilátero si: $p^2 = 3q$.

I.12. Sistemas de Ecuaciones

ISBN: 978-607-9023-46-1

66. Calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix}$$

67. Determina si la recta dada por la ecuación: $4x - 5y - 1 = 0$ pasa por el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 17 &= 0 \\ x + 2y - 10 &= 0 \end{aligned}$$

68. Resuelve el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 3x - y + z - 4 &= 0 \\ x + 2y - z - 4 &= 0 \\ 2x + y + 2z - 16 &= 0 \end{aligned}$$

69. ¿Para qué valores de α, $\alpha \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (\alpha - 1)x - 4y &= 11 + \alpha \\ -x + (\alpha + 2)y &= 2 \end{aligned}$$

a) tiene solución única?

b) tiene solución múltiple?

c) no tiene solución?

70. Resuelve la ecuación

$$\begin{vmatrix} x^3 - 1 & x^2 - 1 & x - 1 \\ x^3 - 8 & x^2 - 4 & x - 2 \\ x^3 - 27 & x^2 - 9 & x - 3 \end{vmatrix} = 0$$

71. ¿Para qué valores de α, $\alpha \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - (\alpha - 1)y &= 1 \\ \alpha x - \quad 2y &= 4 - \alpha \end{aligned}$$

a) tiene solución única?

b) tiene solución múltiple?

c) no tiene solución?

72. Resuelve el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} x_1 + x_1 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_1 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

ISBN: 978-607-9023-46-1

73. Resuelve el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z - 13 &= 0 \\ 3x + 2y + 2z - 16 &= 0 \\ 4x - 2y - 5z + 5 &= 0 \end{aligned}$$

74. Resuelve el siguiente sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas

$$\begin{aligned} 3x + 4y - z - u &= 3 \\ 2x - y - 2z + 2u &= 9 \\ x + 3y + 5z - 4u &= 2 \\ 4x - 8y - 3z + 3u &= 10 \end{aligned}$$

I.13. Determinantes

75. a) Encuentra el área de un triángulo con vértices:

$$A(2,3)\,, \quad B(4,-1) \quad \text{y} \quad C(6,5)$$

b) Determina si los siguientes puntos son colineales:

$$A(1,3)\,, \quad B(2,4) \quad \text{y} \quad C(3,5)$$

c) En cada caso, con la ayuda de un determinante de tercer orden, escribe la ecuación de la recta:

i) que pasa por los puntos: (x,y) y (x_2,y_2);

ii) que pasa por los puntos: $(2,3)$ y $(-1,5)$

76. Prueba que es cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \frac{x_1-x_2}{2} & \frac{y_1-y_2}{2} & 1 \\ x_1 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ -x_2 & y_2 \end{vmatrix} - x_2^2$$

77. Encuentra x en las siguientes ecuaciones y comprueba la solución sustituyendo los valores en el determinante:

a) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

78. Simplifica y calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} 3\alpha & \cos 3\alpha & 1 \\ \operatorname{sen} 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 1 \end{vmatrix}$

ISBN: 978-607-9023-46-1

I.14. Inducción Matemática

79. Prueba que para cada entero positivo n y para cualquier real $a \geq -1$ la siguiente desigualdad es cierta:

$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3$$

80. Demuestra que:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1$$

81. Prueba que:

   a) $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad (x \neq 1).$

   b) $1{\cdot}2{\cdot}3 + 2{\cdot}3{\cdot}4 + 3{\cdot}4{\cdot}5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

   c) $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$

82. Observa que:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 3^2 &= 2+3+4 \\ 5^2 &= 3+4+5+6+7 \end{aligned}$$

Enuncia la generalización de este hecho y demuéstralo.

83. Para toda $n > 1$ en los números naturales demuestra que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

84. Demuestra que la media geométrica de un número finito de números positivos no es mayorque su media aritmética, es decir, para cualesquiera números positivos a_1 , a_2 , a_3 , $\ldots a_n$ se cumple que:

$$\sqrt{a_1a_2a_3\cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$$

ISBN: 978-607-9023-46-1

85. Prueba por inducción que:

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + (n-2) \cdot 3 + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

86. Demuestra que n rectas en el plano no pueden dividir a éste en más de 2^n regiones ajenas.

I.15. Raíces de Polinomios

87. a) Prueba que 5 es una raíz del polinomio $P(x) = x^5 - 5x^4 - 3x + 15$.
    b) Prueba que $x = -3$ satisface la ecuación $x^5 - x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 8x + 699 = 0$.
    c) Divide $f(x) = x^7 - 101x^5 + x^4 - 60x^2 + x$ entre $x + 4$.
    d) Sea $g(x) = x^5 - 6x^4 + 7x^3 + x^2 + x + 2$; encuentra $g(10)$.
    e) Determina el valor de $h(x) = x^7 - 3x^5 + 4x^4 + 5x^2 + 11$ cuando $x = -6$.
    f) Si -4 es raíz de $Q(x) = 2x^3 + 6x^2 + 7x + 60$, encuentra las demás raíces.

Cuando dos términos sucesivos en un polinomio tienen el mismo signo, se dice que hay una permanencia del signo.

Cuando dos términos sucesivos en un polinomio tienen el signos opuestos, se dice que hay una variación del signo.

Ejemplo. *En la ecuación $x^4 + x^3 - x^2 + 5 = 0$ los signos de los términos están en el orden: $+\ +\ -\ +$. Del primer término al segundo, hay una permanencia $(+\,+)$. Del segundo al tercero hay una variación $(+\,-)$ y del tercero al cuarto tenemos otra variación $(-\,+)$. En total, hay dos variaciones y una permanencia.*

Regla de los signos de Descartes. *Una ecuación polinomial $f(x) = 0$, con coeficientes reales, tiene tantas raíces positivas como variaciones de signo o un número menor, éste disminuido de aquél por un número par.*

88. Prueba que:

    a) Una ecuación que tiene todos sus términos con signo positivo no puede tener ninguna raíz positiva.
    b) Si el número de variaciones de signo en una ecuación es impar, la ecuación tiene al menos una raíz positiva, pero no puede tener un número par de raíces positivas.

ISBN: 978-607-9023-46-1

89. Prueba que si $f(x)$ es un polinomio y es dividido por $x - h$, cada residuo sucesivo es igual a $f(h)$ cuando cada x de ese residuo es sustituida por h.

90. a) La ecuación $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24 = 0$ no tiene raíces complejas. ¿Cuántas raíces positivas y cuántas negativas tiene?

    b) Prueba que $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$ no puede tener exactamente dos raíces positivas ni exactamente una raíz negativa.

91. Prueba que si un polinomio $f(x)$ se multiplica por un factor $(x - \alpha)$, con $\alpha > 0$, introduciendo una nueva raíz positiva, las variaciones de signo en el producto aumentarán, respecto a las del polinomio original, en un número impar.

92. Prueba que si las raíces de una ecuación completa son todas reales, el número de raíces positivas es igual al número de *variaciones*, y el número de raíces negativas es igual al número de *permanencias*.

93. Prueba que:

    a) Si todos los términos de una ecuación polinomial tienen signo positivo, si el término constante es diferente de cero y la ecuación no contiene ninguna potencia impar de x, entonces todas sus raíces son complejas.

    b) Si todos los términos de una ecuación polinomial son positivos y todos contienen potencias impares de x, entonces $x = 0$ es la única raíz real de la ecuación.

94. Prueba que una ecuación completa con signos alternantes no puede tener una raíz negativa.

ISBN: 978-607-3023-46-1

II. Geometría

II.1. Nociones Elementales

1. En la figura 1, las rectas l, m y n se intersecan en el punto O. El ángulo entre m y n es α, entre l y n es β y entre l y m es γ. Calcula $\alpha + \beta + \gamma$.

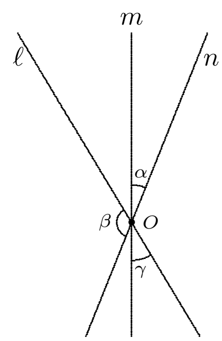


Figura 1

2. De acuerdo a la figura 2, ¿cuánto mide d?

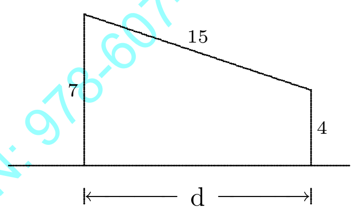


Figura 2

ISBN: 978-607-9023-46-1

3. De acuerdo a la figura 3, calcula la diferencia entre los ángulos β y α.

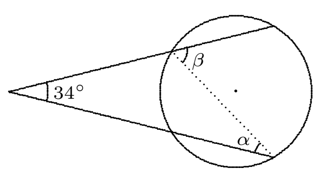


Figura 3

4. En la figura 4 se muestra una circunferencia C con centro en O. La recta t es tangente a C, siendo T su punto de tangencia. Además, $\overline{TS}$ es una cuerda y $\measuredangle TOS = 110°$. Encuentra el valor del ángulo α. Justifica tu respuesta.

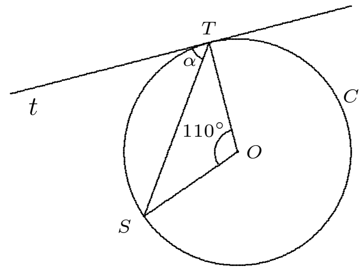


Figura 4

5. En un triángulo que tiene dos ángulos interiores iguales, ¿pueden ser estos ángulos rectos u obtusos?. Justifica tu respuesta.

6. En el triángulo ABC se cumple que:

$$\measuredangle CAB = \measuredangle CBA \quad \text{y} \quad \measuredangle CAB = 2\measuredangle ACB$$

   Se traza la bisectriz del ángulo $\measuredangle CBA$ intersectando al lado AC en el punto Z. ¿Cómo son entre sí BZ y ZC?. Justifica tu respuesta.

7. Dos lados de un triángulo miden 19 y 65cm. ¿Entre qué valores puede elegirse el tercer lado de este triángulo?

II.2. Congruencia de Triángulos

ISBN: 978-607-9023-46-1

8. Si ABC es un triángulo rectángulo en C, AM es la bisectriz del ángulo $\measuredangle CAB$, con M en el lado CB, y N es el punto en AB tal que MN es perpendicular a AB, prueba entonces que $CM = MN$.

9. Prueba que en un triángulo isósceles ABC con $\measuredangle B = \measuredangle C$, la mediana del lado BC coincide con la bisectriz del $\measuredangle A$.

10. Si D es el punto medio de los segmentos AB y EC al mismo tiempo, muestra que $AE = BC$ y que $AE \parallel BC$.

11. Consideremos el punto medio del lado BC en el triángulo ABC, al cual llamamos P y desde donde se trazan las paralelas a los lados AB y AC cortando al triángulo en M y N respectivamente. Muestra que

$$NC = MP$$
$$BM = PN$$

12. Sea ABC un triángulo isósceles con $AC = AB$ y N y M puntos en CB tales que

$$CN = MB$$

Mustra que $AN = AM$.

13. De acuerdo a la figura 5 tenemos que:

$$\measuredangle\alpha = \measuredangle\beta$$
$$AB = DF$$
$$CF = BE$$

Prueba que: $AC = DE$.

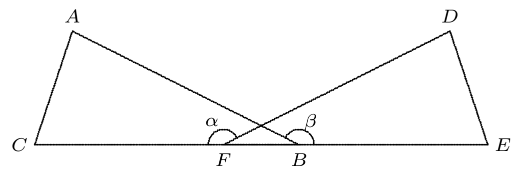


Figura 5

14. Si en la figura 6 se tiene que:

$$\measuredangle ADE = \measuredangle EBA$$
y $$DC = BC,$$

muestra que: $AB = ED$.

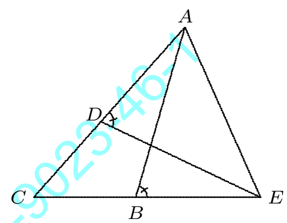


Figura 6

15. Consideremos a ABC un triángulo equilátero y a los puntos M, N y P en los lados AB, BC y AC, respectivamente, tal que $AM = NB = PC$. Prueba que MNP es equilátero y construye dos ejemplos.

16. Muestra que si D es el punto medio del lado AB del triángulo ABC, además DCB es un triángulo isósceles, con $CD = DB$, y ED es bisectriz del ángulo $\measuredangle ADC$, con E en el lado AC, entonces E es el punto medio de AC.

17. Prueba que si en la figura 7 ocurre que:

$$AB = ED$$
$$\measuredangle\alpha = \measuredangle\beta$$
$$EF = BC$$

entonces $AF = DC$.

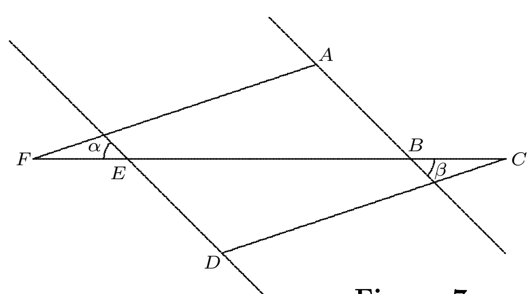


Figura 7

ISBN: 978-607-9023-46-7

18. Si $ABCD$ es un trapecio con $AD = BC$, M el punto medio de AB, AH la perpendicular a DC que pasa por A, BG la perpendicular a DC que pasa por B, sea $DH = GC$, E el punto de intersección de DM con AH y el punto F la intersección de MC con BG, prueba que $EG = FH$.

19. Si en la figura 8 se tiene que:

    $OM \perp AD$ en M,

    $ON \perp CD$ en N,

    $MO = NO$,

    y MOC, NOA y DOB son segmentos,

    muestra que: $AB = CB$.

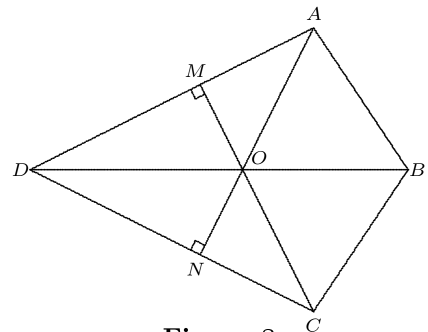


Figura 8

20. Si en la figura 9 se tiene que:

$$\alpha = \beta$$
$$\measuredangle MPC = \measuredangle NPB$$
$$MP = PN$$

    y Q y T son los puntos medios de CP y PB, respectivamente, prueba entonces que AP es bisectriz de los ángulos $\measuredangle QAT$ y $\measuredangle MPN$ y que los segmentos MS y RN son iguales.

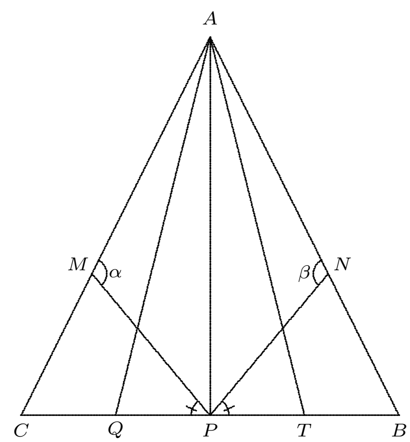


Figura 9

II.3. Desigualdad del Triángulo

21. Si ABD es un triángulo tal que $AB < AD$, muestra entonces que para cualquier punto C en el lado BD se tiene que $AC \leq AD$.

22. Si P es un punto interior del triángulo ABC, verifica que:

$$AP + BP + CP < AB + BC + CA$$

ISBN: 978-607-9023-46-1

23. Si ABC es un triángulo rectángulo en C, CD la altura al lado AB y si ocurre que $AD < DB$, prueba que $\measuredangle DCA < \measuredangle DCB$.

24. Prueba que en cualquier polígono $ABCD$ de cuatro lados se cumple la relación

$$AB < BC + CD + DA$$

25. Si $\measuredangle ACD$ es un ángulo exterior del triángulo ABC, prueba entonces que: $\measuredangle ACD > \measuredangle B$ y $\measuredangle ACD > \measuredangle A$.

26. Si ABC es un triángulo rectángulo en B, BD la altura al lado AC, demuestra que:

$$AB < BC \quad \Leftrightarrow \quad AD < DC$$

27. Dado el triángulo ABC y un punto I en su interior, se trazan los segmentos IA e IB. Justifica que:

$$IA + IB < CA + CB$$

28. Tomando a AD como la bisectriz del ángulo $\measuredangle A$ del triángulo ABC con $AB < AC$, entonces ocurre que

$$BD < AC \quad \text{y} \quad DC < AC$$

donde D está en el lado BC. Pruébalo.

ISBN: 978-607-9023-46-1

II.4. Paralelas

29. En el triángulo ABC, los puntos E y F dividen a los lados AC y BC como se muestra en la figura. Al trazar la recta que pasa por los puntos E y F, ¿interseca esta recta a la que pasa por los vértices A y B?. Justifica tu respuesta.

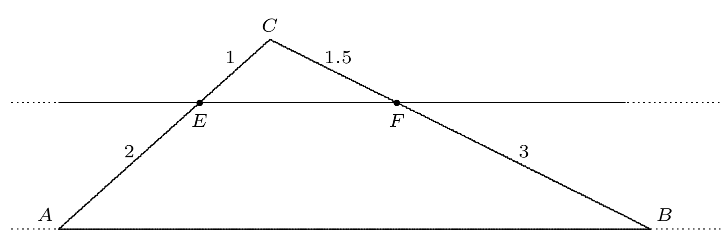


Figura 10

30. Teorema: "*Si tenemos un triángulo isósceles* ABC*,* E *un punto en* AB *y trazamos una paralela a* AC *que pase por* E *y que corte a* BC*, digamos en el punto* F*, entonces el triángulo* EBF *es isósceles.* Demuéstralo y construye dos ejemplos de casos distintos que ilustren el teorema.

31. Consideremos un triángulo isósceles ABC con $AB = BC$, tracemos el segmento DE que pase por B, paralelo a AC, de tal manera que B sea su punto medio. Muestra que $DA = CE$. Observa que no importa la posición relativa de D y E.

32. Si se tienen dos segmentos paralelos del mismo tamaño, digamos BC y FE, y dos puntos, A y D, en la recta BE fuera del segmento BE tales que $AB = ED$, prueba que:

$$AF = CD$$

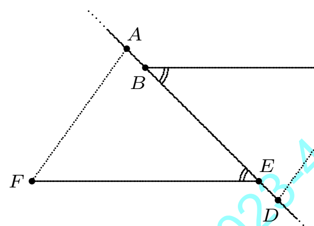


Figura 11

ISBN 978-607-9023-46-1

33. Si tenemos un triángulo ABC y los puntos M, N y P en los lados AB, BC y CA, respectivamente, tales que:

$$MN \parallel AC, \quad NP \parallel AB \quad \text{y} \quad MP \parallel BC$$

prueba entonces que:

$$\measuredangle PAM = \measuredangle MNP, \quad \measuredangle NBM = \measuredangle MPN \quad \text{y} \quad \measuredangle NCP = \measuredangle PMN$$

y que M, N y P son los puntos medios de los lados del triángulo.

34. Consideremos el triángulo ABC con $AC = AB$ y los puntos D, E y F en AC, AB y CB, respectivamente, de modo que $DE \parallel BC \quad \text{y} \quad EF \parallel ACS$. Muestra que

$$DE = CF \quad \text{y} \quad DC = EF$$

35. Sean dos triángulos rectángulos FBC y DAG tales que el lado FB del primero se interseca con el lado DG del segundo en el punto P, y el punto Q es la intersección de los lados FC y DA, respectivamente. Si, de acuerdo a la figura 12 tenemos que:

$$\measuredangle\alpha = \measuredangle\beta$$
$$\measuredangle FBC = 90^\circ$$
$$BC = AG$$

entonces, muestra que: $GD = BF$.

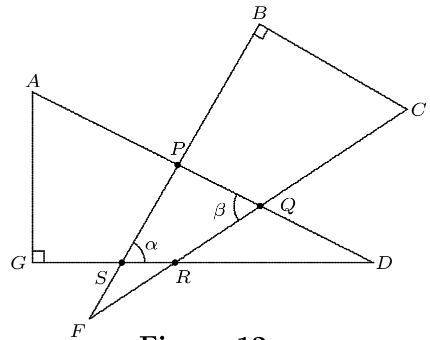


Figura 12

36. Muestra que si ABC es un triángulo rectángulo, con $\measuredangle ACB = 90^\circ$, y M es el punto medio de AB, entonces el triángulo MBC es isósceles. ¿Es cierto el resultado si no se pide que el triángulo sea rectángulo?.

    [Sugerencia: Utiliza una línea de puntos medios].

37. Sea ABC un triángulo con M, N y P los puntos medios de sus lados AC, AB y BC, respectivamente, y sea O la intersección de las medianas, es decir, el *baricentro*. Muestra que:

$$ON = \frac{1}{3}CN$$
$$OP = \frac{1}{3}AP$$
$$OM = \frac{1}{3}MB$$

    [Sugerencia: Utiliza una línea de puntos medios].

ISBN: 978-607-9023-46-1

38. ¿Qué opinas de la siguiente proposición?

    a) Si ABC es un triángulo, P el punto medio de BC, $MP \parallel AB$ y $AC \parallel NP$, entonces:

$$CM = BN$$

    Justifica tu respuesta.

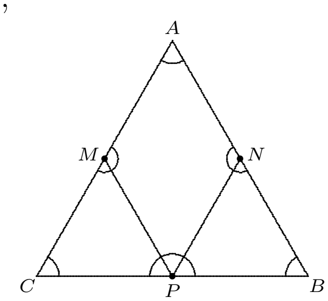


Figura 13

b) Constata la proposición en el triángulo de la figura 14. ¿En qué falló la demostración?

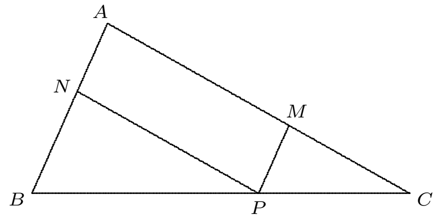


Figura 14

39. Demuestra que si ABC es un triángulo tal que

$$MP \parallel AB$$
$$AC \parallel NP$$
$$AN = NP$$

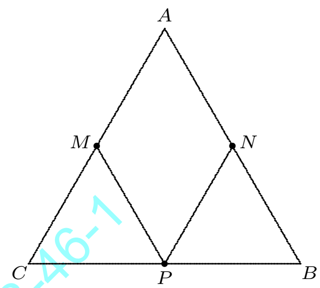


Figura 15

Entonces P es el punto medio de BC.

II.5. Semejanza de Triángulos

40. En la figura 16, las rectas l, m y n son parealelas. De acuerdo a los valores mostrados, calcula el valor de x.

41. Si en la figura 17 los triángulos SKA y ASI son semejantes, prueba que SKA e isósceles o exhibe un contraejemplo.

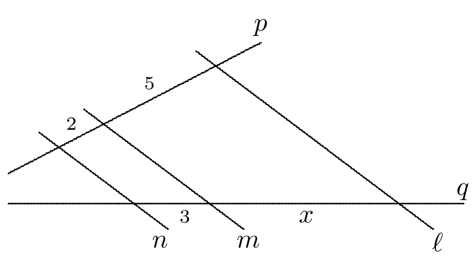


Figura 16

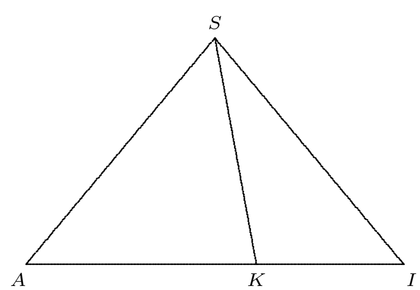


Figura 17

42. En la figura 18, los segmentos BL y OI son alturas del triángulo MBI. Muestra que se cumple que

$$\triangle BOE \sim \triangle ILE$$

ISBN: 978-607-9023-46-1

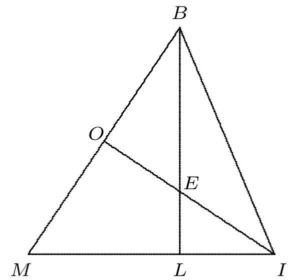


Figura 18

43. Considera una parábola vertical y elige dos puntos cualesquiera sobre ella, llamémosles A y B.

    Traza el segmento AB y elige un punto interior en este segmento, designándolo por I.

    Ahora, por el punto B traza la recta tangente a la parábola. Traza también la recta que pasa por A paralela al eje de la parábola. Sea C la intersección de estas dos rectas.

    Por I trazamos una paralela a AC que interseque a la parábola en E y que interseque en G a la recta tangente que pasa por B. Prueba que

$$\frac{IG}{IE} = \frac{AB}{AI}$$

    [Sugerencia: Utiliza Geometría Analítica y la ecuación $y = kx^2$].

44. Considera el triángulo FRN y sea el segmento FA la bisectriz del ángulo $\measuredangle RFN$, con A en el ladi RN. Muestra que si C es un punto sobre FN tal que $FC = AC$, entonces

$$\frac{FC}{FN} = \frac{RA}{RN}$$

45. Dado el triángulo FRI y los puntos O y L en el lado FR y N en el FI, de tal manera que $LN \parallel OI$ y $ON \parallel RI$, muestra que:

$$\frac{FL}{LO} = \frac{FO}{OR}$$

46. Sea ABC un triángulo y GH un segmento donde G está en el lado AB y H en el BC [ver figura 19]. Prueba que

$$GH \parallel AC \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BG}{GA} = \frac{BH}{HC}$$

ISBN: 978-607-9023-46-1

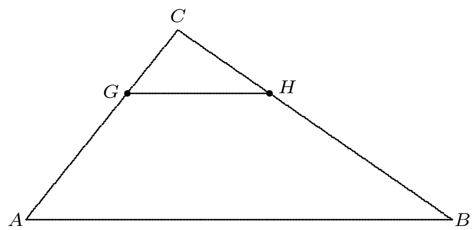


Figura 19

¿Qué pasa con esta proposición si G es un punto medio?

47. En la figura 20 se muestra una manera indirecta de conocer la altura de un árbol.

    a) Si la estatura de la niña es de 1.5m, ¿qué otro dato hace falta para conocer la altura del árbol?

    b) Si esa distancia es de 1m, determina la altura del árbol

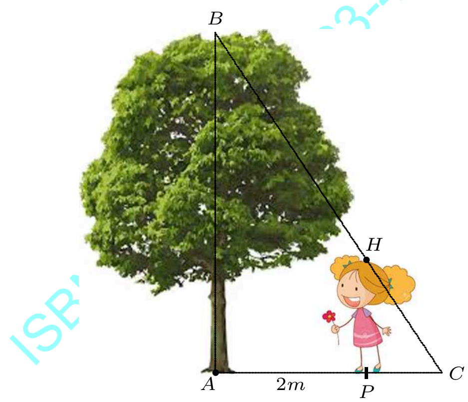


Figura 20

48. Si ABC es un triángulo, M, N y P los puntos medios de sus lados, entonces muestra que los cuatro triángulos que se forman al unir los puntos medios son congruentes entre sí y semejantes con ABC.

49. En la figura 21, si AH bisecta al ángulo $\measuredangle BAC$ y $EH \parallel AC$, prueba que:

$$\frac{BE}{EA} = \frac{BA}{AC}$$

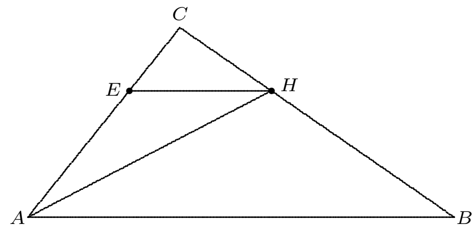


Figura 21

50. El área de dos triángulos semejantes son 16 y 9, respectivamente. Si el perímetro del primer triángulo es 12, encuentra el perímetro del segundo.

51. Sea ABC un triángulo arbitrario. Elige un punto D en AB y traza una paralela a CA y otra a BC. Llama a los puntos de intersección E y F, respectivamente. Prueba que:
$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \sim \triangle DBF$$
y da dos ejemplos distintos de esto.

52. En el siguiente dibujo [figura 22] se muestra el *Pantógrafo de Scheiner*, un dispositivo que agranda los dibujos. Consiste de cuatro barras de madera sujetas en los puntos A, B, C y D, de tal manera que
$$AB = CD \quad \text{y} \quad AD = BC$$
teniendo posibilidad de no ser un rectángulo. El punto D se mueve sobre la figura que se quiere agrandar, el punto P es fijo y E es el punto (con un lápiz) que va creando el nuevo dibujo, de tal forma que P, D y E estén alineados.

ISBN: 978-607-9023-46-1

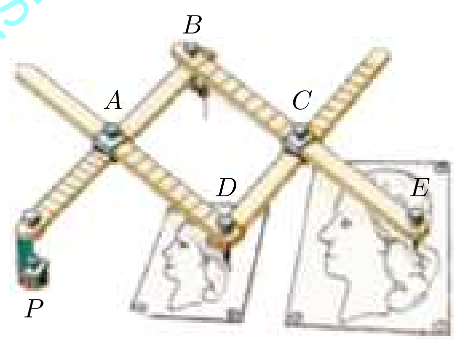


Figura 22

a) ¿Por qué P, D y E una vez alineados siempre quedan alineados?

b) ¿Cuál es la razón de agrandamiento?

53. Muestra que en un trapezoide siempre hay dos triángulos semejantes (considerando sus diagonales).

54. Sea ABC un triángulo rectángulo en B y BD la altura que pasa por B y donde D está en el lado AC. Muestra que:

$$\triangle ABC = \triangle ADB \quad \text{y que} \quad AC \cdot DC = (DB)^2 + (DC)^2$$

55. Consideremos el triángulo ABC y BD un segmento donde D está en el lado AC. Muestra que:

$$BD \quad \text{es bisectriz del ángulo} \quad \measuredangle ABC \leftrightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

56. Consideremos tres rectas paralelas y dos rectas, ℓ_1 y ℓ_2, que las cortan, la primera en los puntos A, O y C y la segunda en los puntos P, R e I. Prueba que:

$$\frac{AO}{PR} = \frac{OC}{RI}$$

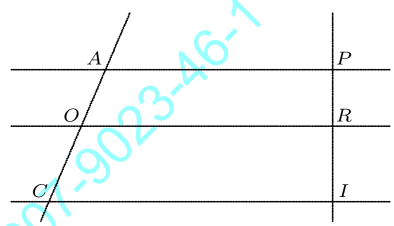


Figura 23

ISBN: 978-607-9023-46-1

II.6. Círculo

57. En la figura 24, HO y HN son rectas tangentes al círculo centrado en J con radios JO y JN. Muestra que los ángulos $\measuredangle J$ y $\measuredangle H$ son suplementarios.

58. En la figura 25, si UK es tangente al círculo con centro en L y $UE = LU$, muestra que E es el punto medio de LK.

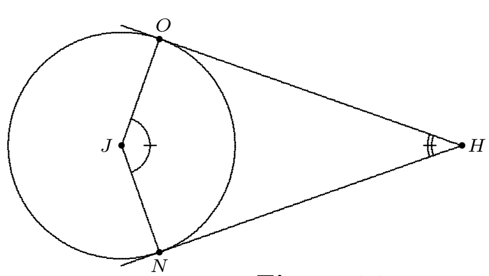


Figura 24

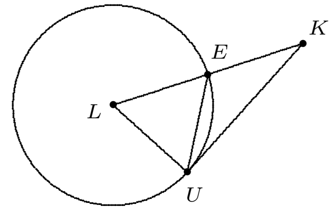


Figura 25

59. Si en un cuadrilátero cíclico $BERL$ se tiene que $BL = ER$, muestra que entonces $BE \parallel LR$.

60. Sea M el centro común de dos circunferencias cuyos radios son diferentes. Si los puntos A y K se encuentran en la circunferencia de radio mayor y AK es tangente a la de radio menor, prueba que $AR = RK$, donde R es el punto de tangencia.

61. ¿Pueden dos circunferencias

    a) tener cuatro tangentes comunes?
    b) tener sólo tres tangentes comunes?
    c) tener exactamente dos tangentes comunes?
    d) tener exactamente una tangente común?
    e) no tener tangentes en común?
    f) tener más de cuatro tangentes comunes?

    Justifica tu respuesta.

62. En la circunferencia con centro en E se tiene que las cuerdas MO y XI son iguales. Prueba que $MI = XO$.

63. En la figura 26 tenemos una circunferencia centrada en el punto O, $DIAN$ es un paralelogramo y los puntos I, M y A son colineales. Prueba que $DM = DI$.

64. Los puntos E, D, S y N pertencen a una circunferencia centrada en O [ver figura 27]. I es un punto exterior a la circunferencia, el punto D pertenece a la secante IE y el punto A pertenece a la secante IN. Si se cumple que $IE = IN$, muestra entonces que: $ID = IS$.

ISBN: 978-607-9023-46-1

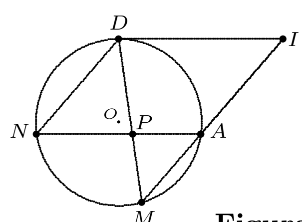


Figura 26

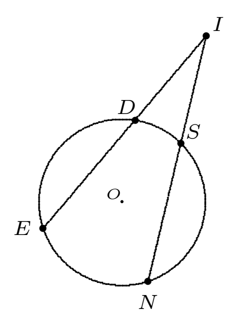


Figura 27

65. ***Definición:*** *El inverso de un punto P con respecto a una circunferencia C, con centro en O y radio r, es el punto P' sobre la linea OP tal que $(OP)(OP') = r^2$.*

a) Construye con regla y compás P'

b) ¿Dónde está el inverso de un punto cercano a O?

c) ¿Cuál es el inverso de los puntos que están sobre la circunferencia?

d) En la figura 28, ¿cuál es el inverso de la recta ℓ?

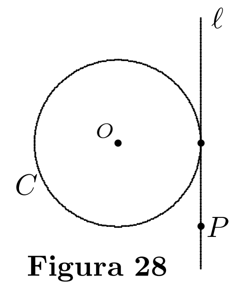


Figura 28

ISBN: 978-607-9023-46-1

66. De acuerdo a la figura 29, las cuerdas WS y HI se intersecan en G y RT bisecta al ángulo $\measuredangle WGI$. Muestra que:

$$\frac{WR}{RI} = \frac{HT}{TS}$$

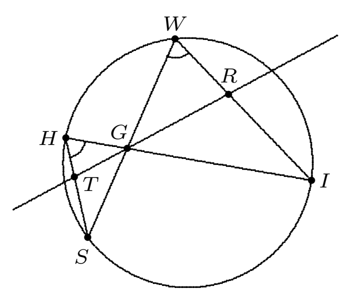


Figura 29

II.7. Cuadriláteros

67. Justifica que en todo paralelogramo los ángulos interiores opuestos son iguales.

68. Muestra que en cualquier paralelogramo, sus diagonales se intersecan en los puntos medios de ambas.

69. Los triángulos EBC y EAD de la figura 30, ¿son semejantes? Explica tu respuesta.

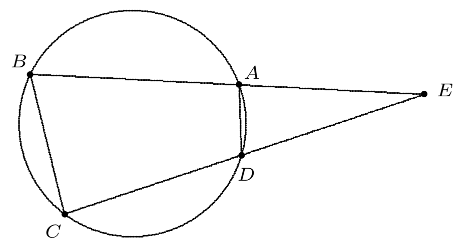


Figura 30

70. AP y AQ son cuerdas de una circunferencia con diámetro AB. La cuerda AQ bisecta al ángulo $\measuredangle BAP$. Justifica que la tangente en Q es perpendicular a AP.

71. Si en la figura 31, $KOFA$ es un rectángulo y $OUFA$ un paralelogramo, muestra que el triángulo KUF es isósceles.

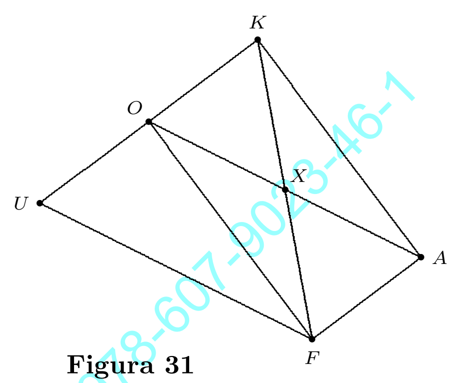


Figura 31

ISBN: 978-607-9023-46-1

72. Si en la figura 32 ocurre que

$$SG = GT \quad \text{y} \quad KG = GN$$

muestra que $\measuredangle A = \measuredangle NTI$.

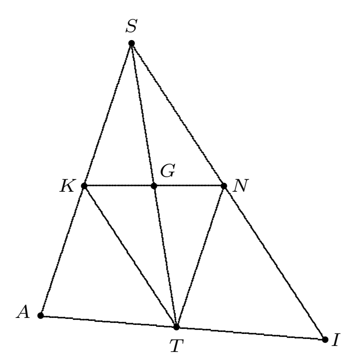


Figura 32

73. Si en el triángulo ABC tomamos los puntos J, K y M en los lados AC, AB y BC, respectivamente, de tal manera que $AKMJ$ y $BMJK$ sean paralelogramos con alguno de ellos un rombo, muestra entonces que ABC es isósceles y que J, K y M son los puntos medios de los lados correspondientes.

74. Demuestra que los puntos medios de los lados de un paralelogramo forman un paralelogramo.

75. Demuestra que si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces D está en el interior del ángulo $\measuredangle ABC$.

76. Enuncia y demuestra un teorema sugerido por los cuadriláteros mostrados en la figura 33, donde P, Q, R y S son puntos medios de los segmentos a los que pertenecen respectivamente.

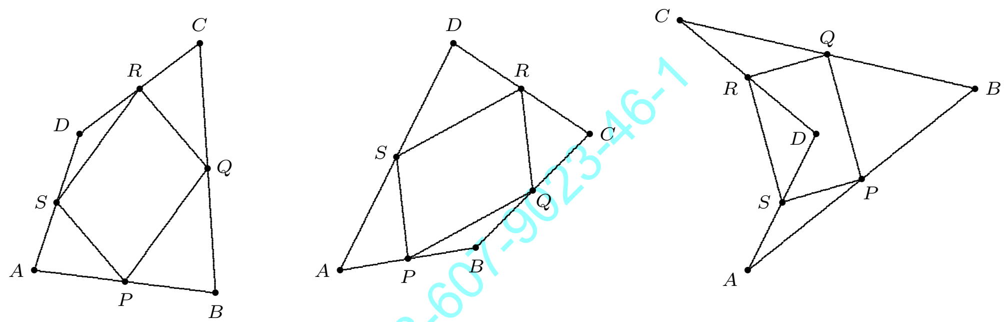


Figura 33

[Sugerencia: Traza una diagonal del cuadrilátero $ABCD$].

ISBN: 978-607-9023-46-1

II.8. Construcciones con regla y compás

77. Construye la tangente a una circunferencia por un por un punto dado sobre ella.

78. Construye un triángulo equilátero dada su altura.

79. Dado un segmento de longitud a, construye un segmento de longitud $\sqrt{3}\cdot a$.

80. Dados los segmentos de longitud a y b, construye los segmentos de longitud $a\cdot b$ y $\frac{a}{b}$.

81. Construye una circunferencia tangente a ambos lados de un ángulo, dados el ángulo y el radio de la circunferencia.

82. Construye un trapecio isósceles dadas las bases y una diagonal.

83. Dado un triángulo escaleno cualquiera, construye su circunferencia inscrita.

84. Construye la tangente al círculo dado un punto fuera de fuera de él por el que pasa la recta tangente.

85. Dados dos puntos A y B sobre la recta ℓ y una circunferencia C tangente a ℓ en A, construye otra circunferencia tangente a ℓ en B y tangente también a la circunferencia C.

86. Dada una circunferencia C_1 y una recta exterior a ella, encontrar otra circunferencia tangente tanto a C_1 como a la recta.

ISBN: 978-607-9023-46-1

ISBN: 978-607-9023-46-1

III. Cálculo Diferencial e integral

III.1. Funciones

III.1.1. Definición

1. Si sabemos que $f(x-1) = x^2 + 4(x+1)$, entonces:

   a) ¿Cuánto vale $f(5)$?

   b) ¿Qué función es $f(x)$?

   c) Encuentra $f(3x-4)$.

2. Si $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, calcula las siguientes funciones:

   a) $f[f(x)]$

   b) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   c) $f(cx)$

   d) $f(x+y)$

   e) $f(x) + f(y)$

   f) ¿Para qué números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$? [No es sólo $c = 1$]

   g) ¿Para qué números c existen dos números distintos, x_1 y x_2 tales que $f(cx_1) = f(x_1)$?

ISBN: 978-607-9023-46-1

3. Demuestra que si $f(x)$ es una función polinómica y $f(a) = 0$, $a \in D_f$, entonces $f(x) = (x-a) \cdot g(x)$ para alguna función $g(x)$ polinómica.

III.1.2. Propiedades

4. ¿Es cierto el siguiente teorema? Si lo es, pruébalo, y si no, da algún contraejemplo para cada caso.

$$\textit{Si } f(x) \textit{ y } g(x) \textit{ son funciones pares} \quad \Rightarrow \quad f+g,\ \frac{1}{f} \textit{ y } f \circ g \textit{ son pares.}$$

5. Da los siguientes ejemplos:

   a) Una función cuyo dominio sea $\mathbb{R} - \{5\}$.

   b) Una función cuya imagen sea $\mathbb{R} - \{5\}$.

   c) Una función cuya imagen sea $(\,2\,,\,\infty\,)$.

6. ¿Cuándo un polinomio:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

   es una función impar?

III.1.3. Operaciones con Funciones

7. *a*) Si tenemos que:

$$f(x) = x^2\,, \quad g(x) = [\,x\,]\,, \quad h(x) = 2^x \quad \text{y} \quad k(x) = \operatorname{sen} x\,,$$

   determina y grafica las siguientes composiciones indicando los dominios e imágenes.

   i) $f \circ h$ ii) $f \circ k$ iii) $f \circ g$ iv) $g \circ f$ v) $g \circ k$

   b) Si $f(x)$ y $g(x)$ están definidas de la siguiente manera, encuentra $f \circ g$ y $g \circ f$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0) \\ x^2 & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ -2 & \text{si} \quad x \in (1, \infty) \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x \in (-\infty, -1) \\ 0 & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ 1 & \text{si} \quad x \in (1, \infty) \end{cases}$$

ISBN: 978-607-9023-46-1

8. *a*) Supongamos que f es una función constante. ¿Para que funciones g se cumple que $f \circ g = g \circ f$?

   b) Supongamos que $f \circ g = g \circ f$ para todas las funciones g. Demuestra que $f(x) = x$.

   c) Si $f(x) = x + 1$, ¿existen funciones g tales que $f \circ g = g \circ f$?

9. Supongamos que H es una función tal que $H[H(x)] = x$:

   a) ¿Cuál es el valor de $H[\ldots[H(x)]\ldots]$ 80 veces?

   b) Responde el inciso a) suponiendo que $H[H(x)] = H(x)$

10. Sean:

$$g(x) = x^2\,, \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{y} \quad \ell(x) = -(x-1)^2 + 2$$

Grafica las funciones y responde lo siguiente:

a) ¿Qué valores de x cumplen que $g(x) \leq \ell(x)$?

b) ¿Para qué valores de x se cumple que $h(x) \leq g(x)$?

c) ¿Qué valores de x cumplen que $h(y) \leq y$?

d) ¿Para qué valores de x se cumple que $g[g(x)] = g(x)$?

e) ¿Qué función es $g[h(x)] = -h(x)$?

f) ¿En qué punto t se cumple que $\ell(t) \leq 2t$?

g) ¿Qué valor de x cumple que $h(x) \leq \ell(x)$?

ISBN: 978-607-9023-46-1

III.1.4. Graficación

11. Si contamos con la gráfica de la función f, para cada inciso describe la gráfica de g en términos de la gráfica de f. Cuando corresponda, analiza los casos $c \geq 0$ y $c < 0$.

a) $g(x) = f(x) + c$

b) $g(x) = f(x + c)$

c) $g(x) = c \cdot f(x)$

d) $g(x) = f(c \cdot x)$

e) $g(x) = |f(x)|$

f) $g(x) = f(|x|)$

12. *a*) Bosqueja la gráfica de las siguientes funciones:

i) $f(x) = |\,3x^2 - 6\,|$

ii) $f(x) = -2(x-2)^3 + 1$

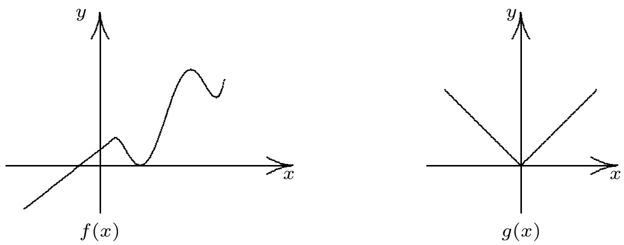
iii) $f(x) = 3\cos(2x) - 3$

b) Resuelve geométricamente: ¿Qué x cumplen la desigualdad:

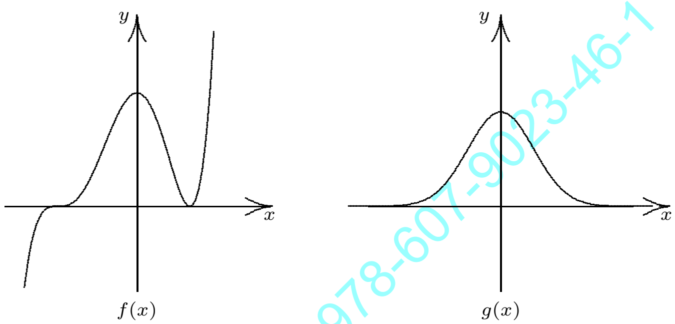
$$\left|-x^2-4x+5\right| \leq \left|x^2+4x+5\right| ?$$

13. Dadas las gráficas de f y g, encuentra las gráficas de $f \circ g$ y $g \circ f$. Describe sus características:

a)



b)



ISBN: 978-607-9023-46-1

14. Bosqueja la gráfica de cada función $f(x)$ analizando en cada caso las gráficas de las funciones componentes:

a) $f(x) = x(x-1)^2$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

c) $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(3x^2-1)^2}$

e) $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$

f) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

g) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$

15. Para las gráficas de los incisos $a)$ al $h)$, encuentra la ecuación que le corresponde, eligiendo de la siguiente lista:

   i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} - 1$

   ii) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^4 & \text{si } x \leq 1 \\ -4x^3 + 9x^2 - 6x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

   iii) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$

   iv) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

   v) $f(x) = \dfrac{x^3}{4}$

   vi) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}^{2} + 1$

   vii) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{10x}\right)$

   viii) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - 1$

   ix) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

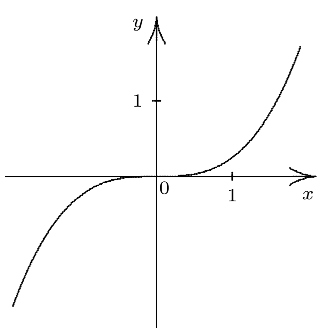
   x) $f(x) = |-e^x + e|$

   xi) $f(x) = -x^3$

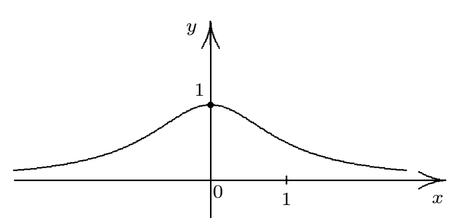
   xii) $f(x) = \dfrac{8x}{16x^2+1}$

ISBN: 978-607-9023-46-1

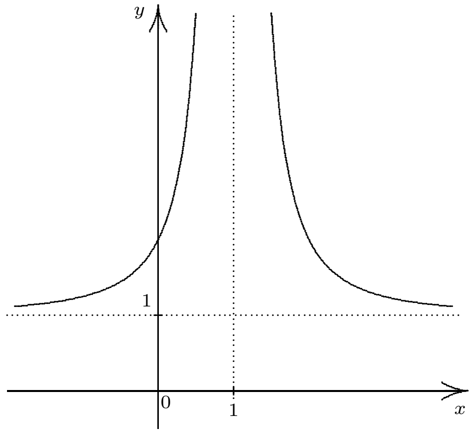
a)



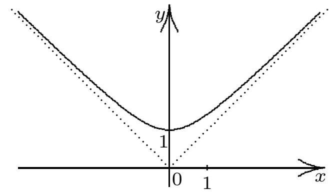
b)



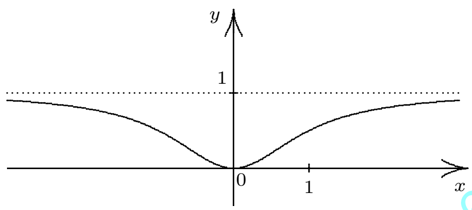
c)



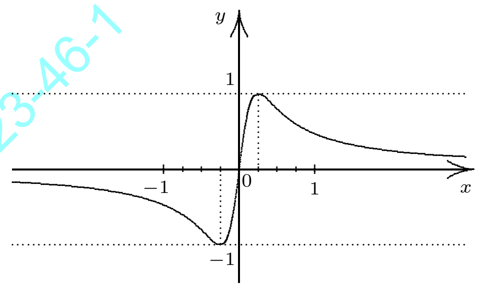
d)



e)

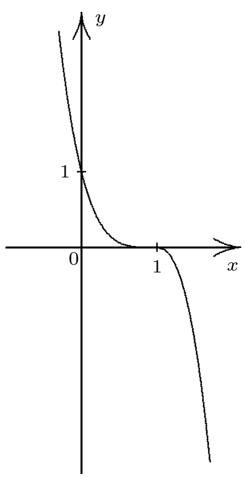


f)

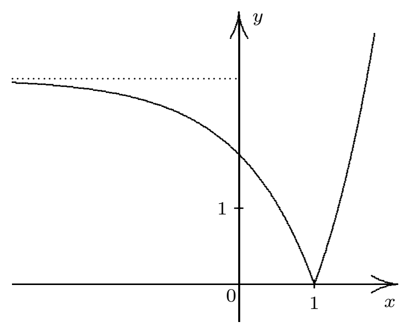


ISBN: 978-607-9023-46-1

g)

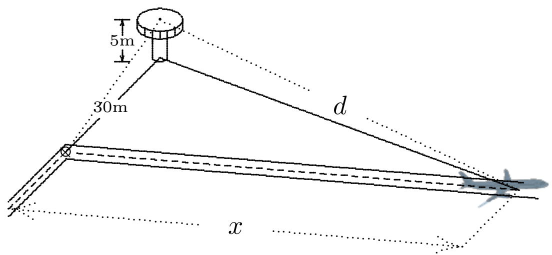


h)



III.1.5. Aplicaciones: funciones a través de problemas

16. En la siguiente figura se muestran las posiciones de un avión y una torre de control de 5m de altura. El inicio de la pista se encuentra a una distancia de 30m de la base de la torre sobre la perpendicular. Expresa la distancia del avión a la parte alta de la torre como función de la distancia recorrida por el avión sobre la pista. ¿A qué distancia se encuentra el avión de la parte alta de la torre cuando ha recorrido 100m?



17. La demanda de cierto producto con respecto a su precio está dada por:

$$d = D(p) = 6000 - 30p$$

donde d es el número de unidades del producto demandadas al precio p. El costo total de producción de dichas unidades es:

$$C(d) = 72000 + 60 \cdot d$$

donde 72000 son los costos fijos (luz, agua, renta, etc.). Entonces, el ingreso por la venta de dichos productos es: $I(d) = p \cdot d$. Y así, la función ganancia es:

$$G(d) = I(d) - C(d)$$

a) Obtén el costo total como función de p.

b) Obtén el ingreso como función de p.

c) Grafica los puntos cuyos precios hacen que no haya ingresos.

d) Grafica los puntos cuyos precios hacen que no haya ganancias.

e) ¿A qué precio hay el mayor ingreso?

f) ¿A qué precio la ganancia es máxima?

ISBN: 978-607-9023-46-1

18. Un automóvil tiene que hacer un recorrido de 300km a una velocidad constante. El tiempo que se tarda en hacer dicho recorrido depende de la velocidad a la que lo haga, a saber:

$$t(v) = \frac{300}{v} \text{ horas}$$

Si $c(t)$ es la cantidad de litros de gasolina requerida para manejar el auto t horas y está dada por:

$$c(t) = \frac{500}{3t^2}, \quad \text{con } t \in \left[\frac{5}{3}, 10\right]$$

a) Calcula c en función de v. Explica su significado.

b) Grafica $c(v)$.

c) ¿A qué velocidad se obtiene el menor consumo de gasolina posible?

d) ¿Cuánto dinero extra se gastaría si se manejara el auto a 150km/h y el precio de un litro de gasolina fuese \$13?

III.1.6. La función inversa

ISBN: 978-607-9023-46-1

19. Dos conjuntos, digamos A y B, tienen la misma *cardinalidad* –es decir, *el mismo número de elementos*– y se denota: $\#A = \#B$, si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Muestra que:

a) $\#(0,1) = \#(-\infty, \infty)$

b) $\#[\,1,3\,] = \#[\,0,10\,]$

c) $\#(-\infty,\infty) = \#(-\infty, 6)$

20. ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas o suprayectivas? ¿Cuáles biyectivas? Calcula las funciones inversas, si es el caso, o da un dominio en el que se garantice la existencia de la función inversa.

a) $f(x) : [\,0,\infty) \to [\,-2,\infty)$ con $f(x) = 3x - 2$.

b) $f(x) : (-\infty, 0\,] \to [\,-1,\infty)$ con $f(x) = x^2 - 1$.

c) $f(x) : (-\pi,\pi) \backslash \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \tan x$.

d) $f(x) : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ con $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$.

III.2. Límites y Continuidad

III.2.1. Definición

21. Calcula los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

    b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} 4x}$

    c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{x+1}$

    d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$

    e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x^2}$

    f) $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x^2-25}{|x-5|}$

    g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

    h) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x^2}$

22. ¿Existe a de modo que $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-3ax+x-a-1}{x^2-2x-3}$ exista? Explica tu respuesta.

23. a) Da un ejemplo de una función con dominio $D_f = \mathbb{R}-\{a\}$, tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ exista.

    b) Da un ejemplo de una función con dominio $D_f = \mathbb{R}-\{a\}$, tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no exista.

    c) Da un ejemplo de una función con dominio $D_f = \mathbb{R}-\{a\}$, tal que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ exista, pero no así el $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

24. Demuestra a través de la *definición* los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2+3x) = 10$

ISBN: 978-607-9023-46-1

b) $\lim_{x\to 0} |\,x\,| = 0$

c) $\lim_{x\to 1} (-2x^3 + 9x + 4) = -3$

d) $\lim_{x\to -2} \left(-\frac{x}{3} + 1\right) = \frac{5}{3}$

e) $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$ donde:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x < 2 \\ 4 - x^2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

f) $\lim_{x\to 3} \left(\frac{1}{x-1} + 6\right) = \frac{13}{2}$

25. Prueba mediante la *definición* que los siguientes límites son falsos:

a) $\lim_{x\to 2} (x^2 + 2x - 3) = 7$

b) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} + 6\right) = 3$

c) $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$ donde:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ 4 - x^2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

ISBN: 978-607-9023-46-1

26. Encuentra dos funciones, digamos $f(x)$ y $g(x)$, tales que $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existan y que, sin embargo, existan los límites:

$$\lim_{x\to a} [\,f(x) + g(x)\,] \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} [\,f(x) \cdot g(x)\,]$$

27. Demuestra que:

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0} g(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

28. Da algún ejemplo en cada caso para mostrar que las siguientes definiciones de

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

no son correctas:

a) $\forall \delta > 0,\ \exists \epsilon > 0$ tal que:

$$\forall x \in \mathrm{D}_f \quad \text{que cumpla que} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

b) $\forall \delta > 0,\ \exists \epsilon > 0$ tal que:

$$\forall x \in \mathrm{D}_f \quad \text{que cumpla que} \quad |f(x) - L| < \epsilon \quad \text{entonces} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

III.2.2. Límites al infinito

29. La función $C(x) = 5000 + 6x$ mide el costo de producción de una cantidad x de cierto producto. El promedio del costo por unidad producida es entonces:

$$g(x) = \frac{C(x)}{x}$$

a) Grafica $C(x)$ y $g(x)$.

b) Muestra que el costo promedio tiende a estabilizarse.

30. Se pronostica que la población de cierta ciudad se rige por la función:

$$f(x) = 20 + \frac{10}{(x+2)^2}$$

donde x mide los años a partir de ahora y $f(x)$ el número de pobladores en millones. Determina la población a largo plazo y explica el comportamiento de la población a través de la gráfica de f.

31. Calcula el límite de las siguientes *sucesiones*:

a) $\left\{\dfrac{3n^2 - 7}{n^2 + 6}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{1 - (-1)^n}{2}\right\}$

c) $\{n^5 + 8n^3 + 27n\}$

d) $\left\{\dfrac{1}{2}\left(n + \dfrac{1 - (-1)^n}{2}\right)\right\}$

e) $\left\{1 + \dfrac{(-1)^n}{2n + 1}\right\}$

ISBN 978-607-9023-46-1

f) $\left\{(-1)^{n+1} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}$

g) $\left\{\dfrac{(2n+1)^3 - (2n-1)^3}{3n^2+1}\right\}$

h) $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\}$

32. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{x-2} - 7\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-1}{2x^2+2x-3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4-7x+3}{25x^2-10x+1}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$

33. Demuestra que los límites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

existen y calcúlalos. Esboza el comportamiento de la gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

ISBN: 978-607-9023-46-1

III.2.3. Continuidad

34. ¿Dónde son continuas las siguientes funciones? Usa la definición de continuidad para justificar tu respuesta e indica el tipo de discontinuidades que aparecen.

a) $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ 5 & \text{si} \quad x=1 \\ x+2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{si} \quad |x|\leq 1 \\ |x-1| & \text{si} \quad |x|>1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ -\frac{1}{x-2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \neq 1 - \frac{1}{n}\,, \ n \in \mathbb{N} \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 - \frac{1}{n}\,, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 2 - x^2 & \text{si} \quad x \in (1,2] \end{cases}$

35. a) ¿Cómo debe definirse $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$ en $x = 0$ para que sea continua en $\mathbb{R}$?

b) ¿Cuáles deben ser los valores a y b para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2] \\ a & \text{si} \quad x = 1 \\ -(x-1)^2 + b & \text{si} \quad x \in (2, \infty) \end{cases}$$

ISBN: 978-607-9023-46-1

36. Resuelve los siguientes ejercicios y da una interpretación geométrica en cada caso.

a) Da un intervalo (a,b), tal que $|b-a| < 1$, donde se encuentre una raíz del polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

b) Demuestra que existe algún número $x \in \mathbb{R}$ tal que: $\operatorname{sen} x = x - 1$.

c) Da un intervalo (a,b), tal que $|b-a| < 1$, donde se encuentre un número $x \in \mathbb{R}$ tal que: $\tan x = x$.

37. Analiza las siguientes funciones para dar, si es que existe, un número $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = c$.

a) $f(x) = x^2 + 5x - 6$ con $[a,b] = [1,2]$ y $c = 4$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$ con $[a,b] = [-4,4]$ y $c = -1$.

c) $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad x \in [-4,-2] \\ 2-x & \text{si} \quad x \in (-2,1] \end{cases}$ con $[a,b]=[-4,1]$ y $c=0$.

d) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$ con $[a,b]=[-2,1]$ y $c=0$.

III.3. Derivada

III.3.1. Definición

38. Encuentra la ecuación de la recta normal o perpendicular a la gráfica de la función $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$ en el punto $(-1, 9)$.

39. Demuestra que cualesquiera dos rectas distintas tangentes a la gráfica de la parábola $y = x^2$ se intersecan en un punto.

40. Encuentra los valores de a y b de modo que la recta $2x + 3y = a$ sea tangente a la gráfica de la parábola $y = bx^2$ en $x = 3$.

41. Demuestra, usando la definición de la derivada, que:

    a) Si f es par, entonces f' es impar.

    b) Si f es impar, entonces f' es par.

    c) ¿Qué puede decirse acerca de $f^{(k)}$ en los dos incisos anteriores?

42. Haciendo uso de la definición de la derivada, demuestra e interpreta geométricamente que:

    a) Si $g(x) = f(x+c)$, entonces $g'(x) = f'(x+c)$.

    b) Si $h(x) = f(x) + c$, entonces $h'(x) = f'(x)$.

43. Demuestra que si $f(x) = f(x+p)$, $\forall x \in \mathrm{D}_f$ (es decir, f es periódica con período p), entonces f' también es periódica.

44. Calcula la derivada de $f(x) = \sqrt{x+1}$ a través de la definición de la derivada. ¿Dónde es derivable esta función?

45. Calcula la derivada de las siguientes funciones como el límite del cociente de incrementos:

    a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

ISBN: 978-607-9023-46-1

b) $f(x) = \tan x$

c) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

e) $f(x) = \sec^2 x$

f) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

g) $f(x) = \sqrt{x}$

46. ¿Tiene derivada la siguiente función en $x = 0$? Explica tu respuesta.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

III.3.2. Reglas de derivación

ISBN: 978-607-9023-46-1

47. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3\sqrt{x} - 2x^2$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x} - 2x$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+7}{x^2+5}}$

d) $f(x) = \dfrac{(3x^2-2)^2}{4x^3+2}$

e) $f(x) = \sqrt{x + \operatorname{sen} x}$

f) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\cos x^2}\right)$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x - \dfrac{2}{x + \tan x}}$

h) $f(x) = \sec\left(\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \cdot \cot^2\left(\dfrac{x^2}{4}\right)$

48. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + \ln^5 x$

   b) $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1 + \sqrt{x})$

   c) $f(x) = \ln(\operatorname{senh} 2x)$

   d) $f(x) = \sqrt{xe^x + x}$

   e) $f(x) = x^x + \sqrt{k^2 - x^2} + k \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x}{k}\right)$

   f) $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

49. Sean $\alpha(x)$, $h(x)$ y $k(x)$ tres funciones tales que:

$$h'(x) = \operatorname{sen}^2[\operatorname{sen}(x+1)] \quad \text{con} \quad h(0) = 3$$

$$k'(x) = f(x+1) \quad \text{con} \quad k(0) = 0$$

$$\text{y} \qquad \alpha(x) = h(x^2)$$

   Donde:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Encuentra:

   a) $(f \circ h)'(0)$

   b) $(k \circ f)'(0)$

   c) $\alpha'(x^2)$

50. Supongamos que f y g son dos funciones derivables que satisfacen que:

$$f(x) \cdot g'(x) - f'(x) \cdot g(x) = 0$$

   Demuestra que si a y b son ceros contiguos de $f(x)$ y si $g(a)$ y $g(b)$ no son ambos cero, entonces $g(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in (a, b)$.

ISBN: 978-607-9023-46-1

III.3.3. Derivabilidad

51. ¿Dónde son derivables las siguientes funciones? Justifica tu respuesta.

    a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

    b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

    c) $f(x) = [\,x\,]$

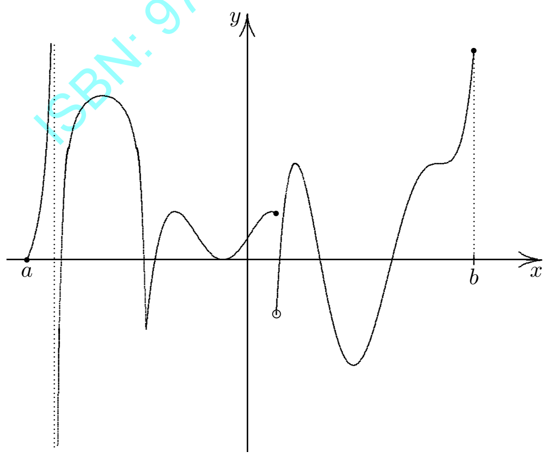
    d) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

    e) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$

52. Da tres ejemplos de funciones no derivables en $x = 1$. Cada ejemplo debe corresponder a una causa distinta por la que no sea derivable.

53. Da una función $f(x)$ derivable en $x = a$ tal que $|f(x)|$ no sea derivable en ese punto.

54. Dada la siguiente gráfica de $f(x)$, esboza la gráfica de $f'(x)$ indicando los puntos donde f' no está definida.



ISBN: 978-607-9023-46-1

55. Si las funciones u y v, definidas respectivamente en cada inciso, son derivables en a, ¿son necesariamente f y g derivables en a? Si la respuesta es afirmativa, demuéstralo; si no, da un contraejemplo:

    i) $u = f + g$ *ii*) $v = f \cdot g$

56. Demuestra que si f es derivable en x_0, entonces

$$f(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |f| \text{ es derivable en } x_0$$

57. Grafica la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

y demuestra que es derivable en $x = 0$ y que no lo es en $x = 1$.

58. Sea la función $f(x)$ definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si} \quad x \leq 1 \\ bx^2 + x + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Encuentra a y b de modo que $f(x)$ sea diferenciable en $x = 1$.

59. Sea la función $f(x)$ definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x < \pi \\ mx + b & \text{si} \quad x \geq \pi \end{cases}$$

Determina todos los valores de las constantes m y b para las cuales:

a) $f(x)$ es continua en $x = \pi$

b) $f(x)$ es diferenciable en $x = \pi$

ISBN: 978-607-9023-46-1

60. Sea la función $f(x)$ definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} |\operatorname{sen} x - 2| & \text{si} \quad x \geq 0 \\ mx + 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Encuentra el valor de m para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$. Grafica.

61. Sea la función $f(x)$ definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si} \quad x < a \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x \geq a \end{cases}$$

Encuentra los valores de a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. Grafica.

62. Para la función:

$$f(x) = (Ax^2 + Bx + C)\operatorname{sen} x + (Dx^2 + Ex + F)\cos x$$

determina los valores de las constantes A, B, C, D, E y F tales que:

$$f'(x) = x^2 \operatorname{sen} x$$

63. Supongamos que:

- $f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(a) = g(a) = h(a)$
- $f'(a) = h'(a)$

Demuestra que $g(x)$ es derivable en a y que: $g'(a) = f'(a) = h'(a)$.

64. Si $f(x) = x^n$ para $x \le 0$ y $f(x) = 0$ para $x > 0$, demuestra que $f^{(n-1)}(x)$ existe para toda x y da la fórmula correspondiente. Muestra que, sin embargo, no existe $f^{(n)}(0)$.

65. *a*) Sea f un polinomio. Decimos que a es una *raíz doble* de f si:

$$f(x) = (x-a)^2 g(x) \quad \text{para algún polinomio} \quad g(x) \quad \text{tal que} \quad g(a) \neq 0$$

Demuestra que a es una raíz doble de f si y sólo sí a es raíz de $f(x)$ y de $f'(x)$ a la vez.

b) ¿Cuándo tiene $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ $(A \neq 0)$ una raíz doble? ¿Cuál es la interpretación geométrica de esta condición?

66. Si $f(x) = |x|^3$, hallar f' y f''. ¿Existe f''' para toda x? Grafica f', f'' y f'''.

III.3.4. Razón de Cambio

67. Las olas circulares que se producen en un lago al tirar una piedra tienen un radio $r(t) = 40t\,\text{cm}$ cuando han transcurrido t segundos desde que se tira la piedra. Encuentra la razón de cambio del área del círculo formado por la ola respecto al tiempo en $t = 1$ y en $t = 3$.

68. Después de t minutos de estar inflándose, el radio de un globo esférico está dado por $r(t) = 3\sqrt{t+8}\,\text{cm}$, con $t \in [0, 10]$. Determina la razón de cambio respecto al tiempo en $t = 8$ de:

ISBN: 978-607-9023-46-1

a) $r(t)$

b) el volumen del globo

c) el área de la superficie del globo

69. Un objeto se tira veritcalmente hacia arriba. La altura en metros después de t segundos está dada por $h(t) = -16t^2 + 144t$. Encuentra la velocidad y aceleración del objeto en $t = 3$. ¿Qué velocidad lleva el objeto cuando llega al suelo? Grafica.

70. Un globo aerostático sube verticalmente. La altura que alcanza medida en kilómetros t horas después está dada por: $s(t) = 9t - 3t^2$.

    a) ¿Cuál es la velocidad inicial del globo?

    b) ¿Cuál es la mayor altura que alcanza?

    c) ¿Cuál es la velocidad promedio del globo durante el tiempo en que va subiendo?

    d) ¿Cuánto tiempo le lleva al globo regresar?

    e) ¿En qué momento alcanza su máxima velocidad?

    Interpreta geométricamente la distancia y la velocidad.

ISBN: 978-607-9023-46-1

71. Desde lo alto de un edificio de 120 metros se deja caer una piedra verticalmente. Después de t segundos, la piedra habrá recorrido $5t^2$ metros.

    a) ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en llegar al suelo?

    b) ¿Cuál es la velocidad promedio de la piedra durante el tiempo que va cayendo?

    c) ¿Qué velocidad lleva la piedra en el instante en que está a 75 metros del suelo?

    d) ¿A qué velocidad choca con el suelo?

    e) ¿En qué momento la velocidad instantánea de la piedra es igual a su velocidad promedio?

72. La función de demanda de un producto con respecto al precio x está dada por:

$$D(x) = \frac{50\,000}{x^2 + 10x + 25} \quad \text{con: } x \in [4, 15]$$

    a) ¿Cuál es la razón de cambio de la demanda con respecto al precio cuando $x = 5$?

b) Grafica $D(x)$ y $D'(x)$ e interpreta gráficamente la rapidez de la demanda.

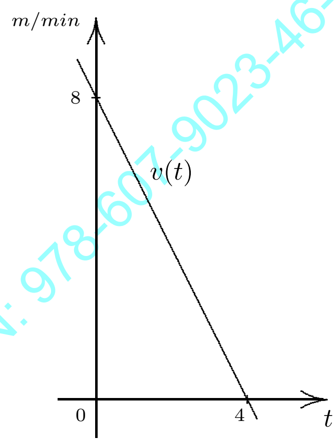
73. El número de estudiantes que ingresan a una escuela transcurridos x años de la apertura de ésta, está dado por

$$f(x) = \frac{10}{9}(12x - x^2) \quad \text{con: } x \in [0, 12]$$

¿A qué tasa cambiará el ingreso de estudiantes después de tres años? ¿y después de 9 años? Grafica f y f' e interpreta.

III.3.5. Los criterios de la primera y segunda derivadas

74. A partir de la gráfica dada a continuación, la cual representa la velocidad de un móvil conforme transcurre el tiempo, esboza la gráfica de la posición del móvil y la de su aceleración.



ISBN: 978-607-9023-46-1

velocidad: m/min

75. Encuentra al menos una solución de la ecuación $4x^3 - x^4 = 30$ o, si es el caso, explica por qué no existe tal solución.

76. Grafica las siguientes funciones determinando cuáles son sus máximos y mínimos, sus puntos de inflexión, sus asíntotas y los intervalos tanto de monotonía como de concavidad.

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x}$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

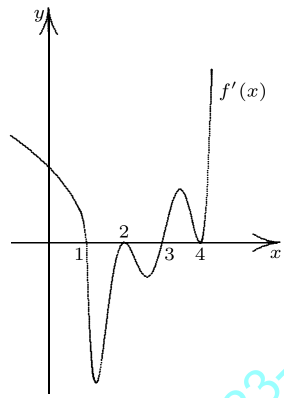
c) $f(x) = x^4 - 2x^2$

d) $f(x) = x^5 - 5x^3$

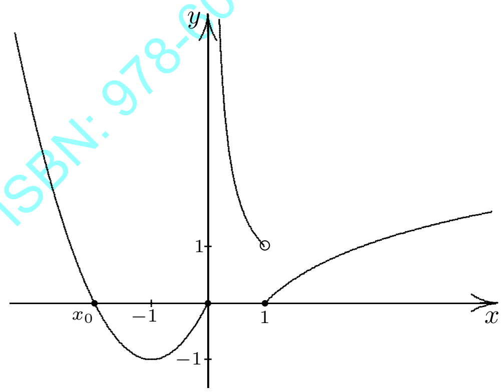
e) $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$

f) $f(x) = (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$

77. Si la siguiente es la gráfica de $f'(x)$, determina todos los puntos máximos y mínimos locales de $f(x)$.



78. Dada la siguiente gráfica de $f'(x)$, esboza la gráfica de $f(x)$.



ISBN: 978-607-9023-46-1

79. a) Considera que $f'(x) > g'(x)$ $\forall x$ y que $f(a) = g(a)$. Demuestra que:

$$f(x) > g(x) \quad \text{si } x > a \qquad \text{y} \qquad f(x) < g(x) \quad \text{si } x < a$$

Interpreta esto geométricamente.

b) ¿Es cierto lo anterior si no pedimos que $f(a) = g(a)$? Justifica tu respuesta.

80. *a*) Da un ejemplo de una función $f(x)$ para la cual el $\lim_{x\to\infty} f(x)$ exista, pero que el $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ no exista.

b) Demuestra que si ambos límites existen entonces

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$$

III.3.6. Teorema de Rolle. Teorema del Valor Medio

81. Para cada una de las siguientes funciones encuentra (si existen) todos los puntos x_0 del intervalo $[a,b]$ para los cuales se cumple que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Por otro lado, verifica las hipótesis del Teorema del Valor Medio.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + 1$ con: $[a,b] = \left[0, \dfrac{5\pi}{2}\right]$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+6x+3}{x-3}$ con: $[a,b] = [1,6]$

c) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ con: $[a,b] = [0,3]$

82. Sea f el polinomio: $f(x) = x^3 - 3x + k$. Demuestra que para cualquier valor de la constante k, f no tiene dos raíces en el intervalo $[0,1]$.

83. *a*) Supongamos que $f(0) = 0$ y que f' es creciente, entonces la función:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

es creciente en el intervalo $(0,\infty)$.

b) ¿Es cierto lo anterior si omitimos que $f(0) = 0$?

84. Si f es continua y derivable en el intervalo $[0,1]$, $f(x) \in [0,1] \quad \forall x \in [0,1]$ y $f'(x) \neq 1 \quad \forall x \in [0,1]$, demuestra que existe un número $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = x_0$, es decir, que en $[0,1]$ hay un *punto fijo* de la función.

ISBN: 978-607-9023-46-1

III.3.7. Regla de L'Hôpital. Derivada implícita

85. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la *Regla de L'Hôpital*?

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{2}=3$$

86. Calcula los siguientes límites:

    a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\sec x}{3\tan x}$

    b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$

    c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}$

    d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$

    e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n\cdot e^{-x}$

87. Encuentra $f'(0)$ si tenemos que $f(x)$ está definida de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x} & \text{si} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

y tenemos también que $g'(x)$ y $g''(x)$ son continuas en $x=0$ con:

$$g(0)=0$$
$$g'(0)=0$$
$$g''(0)=17$$

88. Encuentra todos los puntos donde la curva: $x^2y-xy^2=16$ tiene tangentes verticales.

89. Demuestra que para cualesquiera valores de $c>0$ y $k\neq 0$, las curvas:

$$x^2+2y^2=c \quad \text{y} \quad y=kx^2$$

son ortogonales en todos sus puntos de intersección. Analiza esto geométricamente.

ISBN: 978-607-9023-46-1

90. Si el círculo $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ es tangente a la curva $y=x^2+1$ en el punto $(1,2)$:

   a) Encuentra las posiciones posibles del punto (h,k).

   b) Si además el círculo y la curva tienen la misma segunda derivada en el punto de tangencia, determina las constantes h, k y r. Dibuja la curva y el círculo.

III.3.8. Máximos y Mínimos

91. Para cada una de las siguientes funciones, encuentra los máximos y mínimos en los intervalos indicados y dibuja su gráfica.

   a) $f(x)=x^5+x+1$ en $[-1,1]$

   b) $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2$ en $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

   c) $f(x)=\dfrac{1}{x^5+x+1}$ en $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

   d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

92. De las parejas de números cuya suma sea 40 encuentra dos números cuyo producto sea máximo.

93. Determina las dimensiones del rectángulo que inscrito en un semicírculo de radio R tiene área máxima.

94. Un alambre de un metro de longitud se corta en dos partes. Con una de éstas se forma un cuadrado y con la otra un círculo.

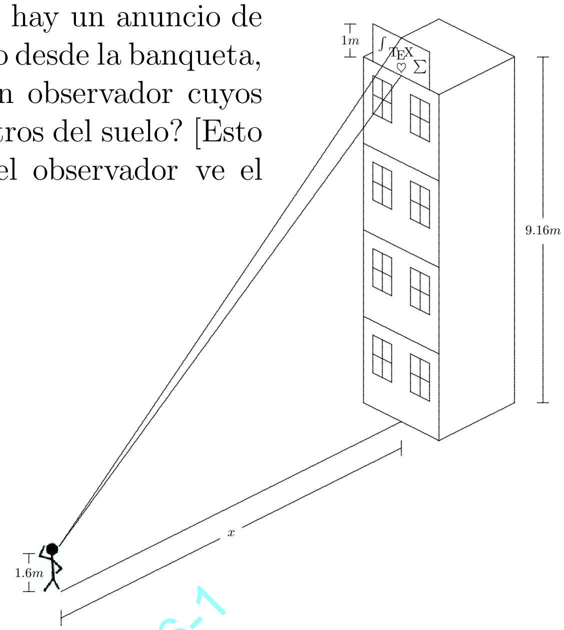
   a) Expresa el área total encerrada por las dos figuras como una función de la longitud del lado del cuadrado.

   b) ¿Cómo debe cortarse el alambre de manera que encierre la mayor área posible?

95. Se quiere formar una lata cilíndrica sin tapa con volumen de 27dm^3. Determinar el radio y altura de la lata para usar la menor cantidad de material.

ISBN: 978-607-9023-46-1

96. Arriba de un edificio de 9.16 metros hay un anuncio de un metro de alto. Para verlo completo desde la banqueta, ¿cuánto debe alejarse del edificio un observador cuyos ojos están a una distancia de 1.6 metros del suelo? [Esto se logra si el ángulo bajo el cual el observador ve el anuncio es el más grande posible].



97. Durante un año, P conejos en una granja dan origen a una población de

$$f(P) = 6P - \frac{P^2}{12}$$

¿Cuántos conejos se necesitan para obtener un crecimiento máximo?

III.3.9. Diferencial y Teorema de Taylor

98. Da una aproximación de los siguientes números usando diferenciales:

a) $\operatorname{sen} 137°$ *b*) $\sqrt[4]{82}$ *c*) $\cos 148°$

99. *a*) Encuentra el mejor polinomio de grado 4 que aproxime a la función:

$$f(x) = \arctan x$$

en una vecindad de $x = 0$. ¿De que radio debe ser dicha vecindad para que el error sea menor que 1×10^{-5}.

b) ¿De qué grado debe ser un polinomio para aproximar los valores de la función:

$$f(x) = \ln x$$

en una vecindad de radio $\frac{1}{2}$ alrededor de $x = 1$ para que el error sea menor que 1×10^{-6}?

c) Encuentra el desarrollo en serie de Taylor de las funciones:

i) $f(x) = \csc x$ *ii*) $g(x) = \operatorname{arc\,sen} x$

ISBN: 978-607-3023-46-1

III.4. Integral

III.4.1. Definición

100. Encontrar el área de las regiones delimitadas por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ como en cada caso se describe:

    a) $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = x^2$

    b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 2x + 4$ y el eje Y

    c) $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1 - x^2$

    d) $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \dfrac{1}{2}$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

    e) $f(x) = |x|$ y $g(x) = \dfrac{x}{2} + 1$

    f) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 3$ en el intervalo $[-1, 1]$.

101. Demuestra que:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$$
y representa geométricamente.

102. Demuestra que si las funciones f y g son integrables, entonces son integrables las siguientes funciones:

    a) $|f(x)|$

    b) $\text{máx}(f,g) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq g(x) \\ g(x) & \text{si} \quad f(x) < g(x) \end{cases}$

    c) $\text{mín}(f,g) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \leq g(x) \\ g(x) & \text{si} \quad f(x) > g(x) \end{cases}$

103. *a*) ¿Qué funciones cumplen que toda suma inferior es igual a toda suma superior?

    b) ¿Qué funciones cumplen que alguna suma superior es igual a alguna suma inferior?

    c) ¿Qué funciones *continuas* cumplen que todas sus sumas inferiores son iguales?

ISBN: 978-607-9023-46-1

d) ¿Qué funciones *integrables* cumplen que todas sus sumas inferiores son iguales?

104. *a*) Da un ejemplo de una función $f(x)$ tal que:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \neq x_0$,
- $f(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in [a, b]$ y
- $\displaystyle\int_a^b f(x) = 0$

b) Demuestra que si:

- $f(x)$ es integrable en $[a, b]$;
- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$;
- $f(x)$ es continua en $x_0 \in [a, b]$ con $f(x_0) > 0$,

Entonces: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0.$

105. Sea $f(x)$ definida, en cada caso, de la siguiente manera:

i) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ x & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \cap [a, b] \end{cases}$ con: $[a, b] = [-1, 1]$

ii) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \in [a, b]\,,\ x \neq 2 - \dfrac{1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si} \quad x = 2 - \dfrac{1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ con: $[a, b] = [0, 2]$

ISBN: 978-607-9023-46-1

a) Para toda partición P de $[a, b]$, calcula: $\overline{S}(f, P)$ y $\underline{S}(f, P)$.

b) Calcula: $\displaystyle\overline{\int_a^b} f$ y $\displaystyle\underline{\int_a^b} f$

c) Sea τ un conjunto de puntos intermedios de P. Para toda τ, analiza qué ocurre con el límite:

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f, P, \tau)$$

106. Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables acotadas definidas en $[a, b]$ y que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Demuestra que fg es integrable en $[a, b]$.

107. Una función $\lambda(x)$ es escalonada si existe una partición $P = \{t_0\,, t_1\,, \ldots\,, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que $\lambda(x)$ es constante en (t_{i-1}, t_i) con $i = 1, 2, \ldots, n$.

   a) Demuestra que si f es integrable en $[a,b]$, entonces: $\forall \varepsilon > 0$ existen $\lambda_1(x)$ y $\lambda_2(x)$ funciones escalonadas tales que se cumple que:

   $$\lambda_1(x) \leq f(x)\,, \quad \lambda_2(x) \geq f(x)\,, \quad \int_a^b f - \int_a^b \lambda_1 < \varepsilon \quad \text{y} \quad \int_a^b \lambda_2 - \int_a^b f < \varepsilon$$

   b) Demuestra que: si $\forall \varepsilon > 0$ existen $\lambda_1(x)$ y $\lambda_2(x)$ funciones escalonadas tales que:

   $$\lambda_1(x) \leq f(x)\,, \quad \lambda_2(x) \geq f(x) \quad \text{y} \quad \int_a^b \lambda_2 - \int_a^b \lambda_1 < \varepsilon\,,$$

   entonces f es integrable.

108. Supongamos que $f(x)$ es continua en $[a,b]$. Si se cumple que:

   $$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = 0$$

   Demuestra que $f(x) = 0$ para *cualquier* función $g(x)$:

   a) Continua en $[a,b]$.

   b) Continua en $[a,b]$ tal que $g(a) = g(b) = 0$.

ISBN: 978-607-9023-46-1

III.4.2. Integrabilidad

109. Para algún intervalo cerrado, da un ejemplo o explica qué funciones cumplen con las características dadas en cada inciso:

   a) Acotada, no integrable.

   b) No acotada, integrable.

   c) Discontinua, integrable.

   d) No existe su integral inferior pero sí su superior.

   e) No escalonada y $\displaystyle\int_a^b f = \underline{S}(f,P)$ para alguna partición P de $[a,b]$.

110. ¿Cuáles de las siguientes funciones son integrables en $[a,b]$? Justifica tu respuesta y calcula la integral si es el caso.

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{si} \quad x \geq 1 \text{ y } x \neq 1 + \dfrac{1}{n}\,, \quad n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 + \dfrac{1}{n}\,, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$ con: $[a, b] = [1, 5]$

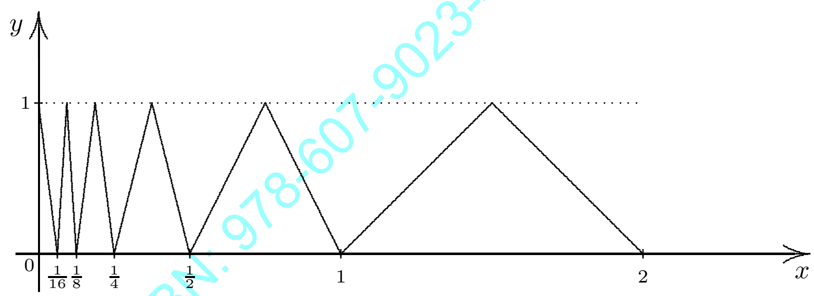
b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$ con: $[a, b] = [-2, 2]$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty) \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \cap [0, \infty) \end{cases}$ con: $[a, b] = [0, 4]$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [0, \infty)\,,\ x \neq 1, 2, 3 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1, 2, 3 \end{cases}$ con: $[a, b] = [0, 4]$

e) $f(x) = x + [x]$ con: $[a, b] = [0, 4]$

f) Con $[a, b] = [0, 2]$, la función cuya gráfica es:



ISBN: 978-607-9023-46-1

111. Da un ejemplo de dos funciones f y g integrables tales que la composición $g \circ f$ no lo sea.

III.4.3. Aplicaciones de la Integral

112. Una moneda con 1 cm de radio es arrojada al azar sobre un piso de mosaicos cuadrados cuyos lados miden 5 cm. Calcula la probabilidad de que la moneda no toque ninguna hendidura entre los mosaicos.

113. Un triángulo equilátero está inscrito en un círculo. Si un dardo lanzado al azar siempre se clava en el círculo, ¿cuál es la probabilidad de que se clave en el triángulo?

114. Un punto (x, y) se escoge al azar en un cuadrado centrado en el origen cuyos lados miden 1 y son paralelos a los ejes coordenados. Encuentra la probabilidad de que la segunda coordenada del punto escogido sea mayor que el cuadrado de su primera coordenada.

115. Si dos números, digamos x y y, se seleccionan al azar en el intervalo $[0, 1]$, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de sus cuadrados también se encuentre en en ese intervalo?

116. En un laboratorio se cae una varilla de vidrio de 18 cm de largo.

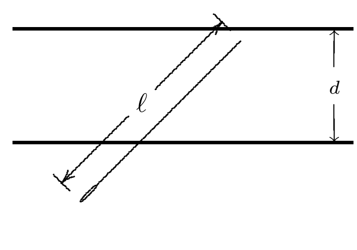
   a) Si la varilla se rompe al azar en dos piezas, ¿cuál es la probabilidad de que la pieza más corta sea de más de 2 cm de largo?

   b) Si la distribución de rompimiento está dada por la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{9} - \dfrac{x}{81} & \text{si} \quad x \in [0, 9) \\[2ex] \dfrac{1}{18} & \text{si} \quad x \in (9, 18] \end{cases}$$

   ¿Cuál es ahora la probabilidad de que la pieza más corta sea de más de 2 cm de largo?

117. Una aguja de longitud ℓ es arrojada al azar a un piso de tablas. Si hay una distancia d entre las hendiduras, ¿cuál es la probabilidad de que la aguja al caer quede cruzada sobre la hendidura entre dos tablas?



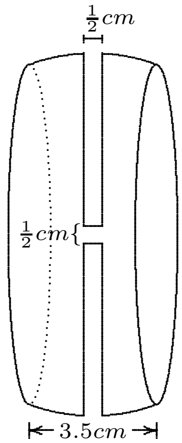
118. Dos números, digamos B y C, se escogen al azar en el intervalo $[-10, 1]$.

   a) Calcula la probabilidad de que la ecuación cuadrática $x^2 + Bx + C = 0$ tenga al menos una solución real.

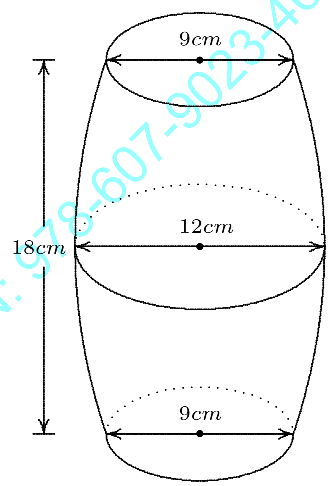
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que *cualquier* ecuación $x^2 + Bx + C = 0$ tenga raíces reales?

119. Se talla un *yo-yo* de una esfera de madera recortando los polos y haciendo un canal alrededor del ecuador, como se muestra en la siguiente figura. Determina el volumen del *yo-yo* si el radio de la esfera es de 5 cm.

ISBN: 978-607-9023-46-1

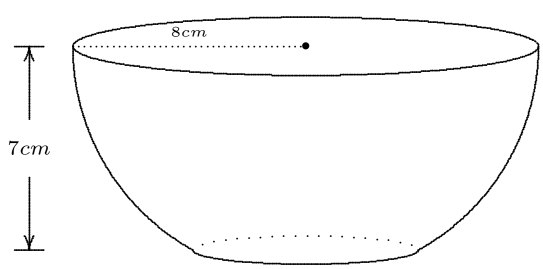


120. Un barrilito de 18 cm de alto está curvado en forma de parábola. Todas las secciones transversales son círculos de tamaño variable con diámetro máximo de 12 cm y mínimo de 9 cm, a la mitad del pequeño barril y en las partes superior e inferior del mismo, respectivamente. ¿Cuál es su volumen?



ISBN: 978-607-9023-46-1

121. Calcula el volumen de un recipiente que es una semi-esfera con 8 cm de radio a la que se ha recortado el polo para dejarle una altura de 7 cm:



122. Un recipiente que pesa 3 kg cuando está vacío, lleva una carga de 40 kg de arena. Mientras se levanta el recipiente, por un agujero que tiene la arena se sale a razón de 2 kg por metro. Si se quiere levantar el recipiente 8 m, ¿cuánto trabajo debe efectuarse para subirlo?

123. Un hormiguero en forma de colina cónica tiene una altura de 1 cm por 2 cm de radio. Si el hormiguero fue hecho de tierra muy fina que pesa 10 g el centímetro cúbico, ¿cuánto trabajo efectuaron las hormigas para construir su colina?

124. Una cadena muy gruesa que pesa 10 kg cada decímetro, está colgando y requiere de 125 kg-dm de trabajo para enrollarla. ¿Cuál es el largo de la cadena?

III.4.4. Integral impropia

125. Explica por qué la integral $\displaystyle\int_{-N}^{N} x dx$ existe y no así la integral: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x dx$.

126. Supongamos que $\forall x \geq 0$ se cumple que $f(x) \geq 0$, que la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ existe y que su valor es finito. Si $0 \leq g(x) \leq f(x)$, $\forall x \geq 0$, demuestra que $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)dx$ existe.

127. Calcula la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ si:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in (0,1] \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \in (1,\infty) \end{cases}$$

128. Aplica los límites convenientes para calcular las siguientes integrales impropias:

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

   b) $\displaystyle\int_0^{a} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ con $a > 0$.

129. Demuestra que la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} x^r dx$ no existe $\forall r \in \mathbb{R}$.

   [**Sugerencia**: Toma en cuenta que si $r < -1$ falla en 0; si $-1 < r < 0$ falla en ∞; si $r = -1$ falla tanto en 0 como en ∞; y si $r > 0$ falla en ∞]

ISBN: 978-607-9023-46-1

III.4.5. Teorema del Valor Medio. Límites de Integración Variables

130. Un cuerpo cae a la tierra a partir de un estado de reposo y adquiere una velocidad:
$$v(x) = \sqrt{2gx}$$
cuando ha recorrido verticalmente x metros. Muestra que el promedio de la velocidad es:
$$\frac{2}{3}v(x)$$

131. Determina la longitud media de todas las cuerdas verticales de la hipérbola:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
con $x \in [a, 2a]$.

132. Encuentra el valor medio de las siguientes funciones sobre los intervalos indicados:

a) $f(x) = 2x^2 + 1, \quad x \in [0, 1]$.

b) $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad x \in [0, \pi]$.

c) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 + 1 & \text{si} \quad x \in [-2, 0] \\ \dfrac{x}{2} + 2 & \text{si} \quad x \in [0, 2] \end{cases} \qquad x \in [-2, 2]$.

ISBN: 978-607-9023-46-1

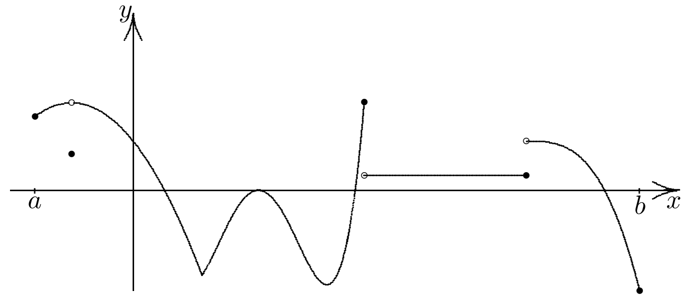
133. Para cada una de las siguientes funciones, dada $f(x)$ encuentra:
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

a) $f(x) = (x-1)^2 + 2, \quad \text{con} \quad [a, b] = [0, 2]$.

b) $f(x) = \sqrt[3]{x-3}, \quad \text{con} \quad [a, b] = [2, 5]$.

c) $f(x) = (x-5)^{-}16 \quad \text{con} \quad [a, b] = [2, 8]$.

134. Esboza la gráfica de $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ donde f tiene la siguiente gráfica:



135. Considera f como una función integrable en $[a,b]$ tal que:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{y} \qquad G(x) = \int_x^b f(t)dt$$

a) Prueba que F y G son continuas

b) ¿Qué ocurre con las gráficas de F y G?

136. Supongamos que f es integrable en $[a,b]$.

a) Demuestra que existe $x \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^x f = \int_x^b f$$

b) Muestra con un ejemplo que no siempre se puede elegir $x \in (a,b)$.

137. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a,b]$ y $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

a) Demuestra que si $f(x)$ tiene una discontinuidad de "brinco" en $x_0 \in [a,b]$ esto implica que $F(x)$ tiene un "pico" en ese punto.

b) Define formalmente "brinco" y "pico".

c) ¿Qué ocurre con $F(x)$ cuando $f(x)$ tiene una discontinuidad removible?

III.4.6. Teorema Fundamental del Cálculo

138. Hallar $F'(x)$ si $F(x) = \displaystyle\int_0^x x f(t)dt$

139. Supongamos que:

$$\int_0^x f(t)dt = x + \int_0^x t\, f(t)dt$$

Da una expresión algebraica explícita (que no involucre integrales) para $f(x)$.

ISBN: 978-607-9023-46-1

140. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones

a) $F(x) = \displaystyle\int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3 t dt$

b) $F(x) = \displaystyle\int_{15}^{x} \left(\int_8^y \frac{dt}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t} \right) dy$

c) $G(x) = \displaystyle\int_x^b \frac{dt}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t}$

d) $F^{-1}(x)$ donde $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$

141. Para cada una de las siguientes funciones $f(x)$ y tomando $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, determina todos los puntos x del dominio de f ocurre que:

$$F'(x) = f(x)$$

Ilustra cada caso geométricamente.

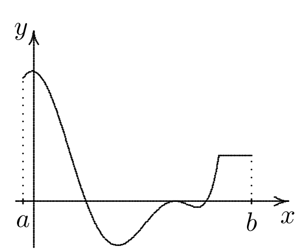
a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x \in [0, 1] \quad \text{con } x = \frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \operatorname{mcd}(p, q) = 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\lceil x \rceil} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

e) $f(x)$ cuya gráfica es:



ISBN: 978-607-9023-46-1

142. Determina si la función:

$$f(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \sqrt{t^2+1}dt$$

es solución de la ecuación diferencial:

$$f''(x) - \frac{f'(x)}{x} = \frac{8x^4}{\sqrt{x^4+1}}$$

143. Evalúa la derivada de $f^{-1}(x)$ en $x=0$ si:

$$f(x) = \int_0^x [1+\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)]\, dt$$

144. Da un ejemplo de una función no periódica tal que su derivada sí lo sea. Es decir, encuentra las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt$$

donde g es periódica y f no lo es.

III.4.7. Técnicas de integración

ISBN: 978-607-9023-46-1

145. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2 dx}{x^3}$

b) $\displaystyle\int |x|\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\left(1-\sqrt[3]{2x}\right) dx}{\sqrt{2x}}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-4x+9}$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}$

f) $\displaystyle\int \frac{(x-5)dx}{x^2-2x+2}$

g) $\displaystyle\int \frac{(3-4x)dx}{(1-2\sqrt{x})^2}$

h) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^2+x+\frac{1}{2}}$

i) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$

146. Utiliza sustitución trigonométrica para resolver las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

147. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

b) $\displaystyle\int 2^{x+1}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{\cot x}}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx$

e) $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}\,dx$

g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx$

h) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\cdot\cos^3 x\,dx$

ISBN: 978-607-9023-46-1

i) $\int \operatorname{sen}^4 x \cdot \cos^5 x \, dx$

j) $\int \sec^5 x \, dx$

148. Realiza los *cambios de variable* pertinentes para resolver las siguientes integrales:

a) $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

b) $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

c) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - 2x^2 - x^4}}$

d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^3}}$

149. Utiliza *integración por partes* para resolver las siguientes integrales:

a) $\int x^2 \ln^2 x \, dx$

b) $\int \sqrt{a + x^2} \, dx$

c) $\int \sqrt{x^2 - 9} \, dx$

d) $\int \operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{x}\right) dx$

e) $\int \cos(\ln x) \, dx$

150. Con el método de *fracciones parciales* resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x(x^2+5)}$

b) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

c) $\int \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}$

ISBN: 978-607-9023-46-1

ISBN: 978-607-9023-46-1

Bibliografía

Aguirre, L. (1987). *Matemáticas I, Problemario.* División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa, México.

Apostol, T. (1977). *Calculus.* Barcelona, España: Reverté.

Cajori, F. (1969). *An Introduction to the Theory of Equations.* New York, USA: Dover Publications.

Courant, R. & John, F. (1987). *Calculus and Analytic Geometry.* USA: Adison-Wesley.

Cruse, A. & Lehmann, M. (1982). *Lecciones de Cálculo.* México: Fondo Educativo Interamericano.

Fraleigh, J. (1984). *Cálculo con Geometría Analítica.* México: Fondo Educativo Interamericano.

Galván, C. (1990). *Matemáticas II, Problemas Resueltos.* División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa, México.

Hall, H. & Knight, S. (1981). *Ejercicios de Álgebra Superior: Soluciones de los Ejercicios Propuestos en la Obra Álgebra Superior.* México: UTEHA.

Haeussler, E. & Paul, R.(1992). *Matemáticas para Administración y Economía.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Jacobs, H. (1974). *Geometry.* USA: W. H. Freeman.

Kachenovsky, M. & Yakovlev, G. (1981). *Algebra and Fundamentals of Analysis* (L. Levant, trad.). URSS: Editorial Mir.

López, G. (1984). *Geometría Euclidiana.* México: PNFAPM y DME-Cinvestav.

Maron, I. A. (1973). *Problems in Calculus of One Variable.* URSS: Editorial Mir.

Minorsky, V. P. (1975). *Problems in Higher Mathematics.* URSS: Editorial Mir.

Moise, E. & Downs, F. (1972). *Matemática IV, Geometría.* Serie Matemática Moderna. México: Fondo Educativo Interamericano y Ed. Norma.

Natanson, I. P. (2002). *La Suma de Cantidades Infinitamente Pequeñas* (V. Llanos, trad.). México: Limusa.

Shilov, G. E. (1984). *Gama Simple: Cómo Construir las Gráficas* (G. A. Lozhkin, trad.). URSS: Editorial Mir.

Spivak, M. (1981). *Calculus.* Barcelona, España: Reverté.

Spivak, M. (1967). *Supplement to Calculus.* USA: W. A. Benjamin Inc.

Thomas, G. & Finney, R. (1987). *Calculus and Analytic Geometry.* USA: Adisson-Wesley.

Verdugo, J. (1988). Aspectos de Álgebra Superior I, a Través de Problemas (segunda parte). *Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación*, IV(26), Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM. México.

ISBN: 978-607-9023-40-1