cK¢, un modèle pour relier connaissance et preuve en didactique des mathématiques

Nicolas Balacheff
CNRS, Laboratoire d'informatique de Grenoble (LIG)

à Adrien Douady

1. Une épistémologie pour reconstruire un lien perdu

1.1. Entre forme et fond, une rupture didactique

La preuve, en mathématiques, reçoit classiquement le nom de « démonstration » et répond à des normes d'écriture précises qui en font un genre de discours très singulier. Cette caractéristique participe largement à l'idéalisation de la rigueur définitive que certains envient. Pourtant, au sein de la communauté des mathématiciens, les choses sont un peu différentes. Le caractère probatoire de la démonstration est certes très fort, mais il est aussi et toujours placé sous vigilance en raison de la complexité des preuves qui peut laisser une place à l'erreur humaine, voire à l'erreur mécanique lorsque la puissance de calcul des ordinateurs est mobilisée. Cette vigilance s'exerce sur les aspects formels, mais aussi en confrontant le discours mathématique à sa signification. C'est ce lien entre forme et signification qui est souvent perdu de vu par les admirateurs de l'excellence mathématique, et aussi, souvent, par ceux qui sont confrontés à un enseignement dans lequel l'apprentissage de la démonstration est abordé sans lien fort avec l'enseignement du « contenu » mathématique lui-même.

Dans certains programmes scolaires, par exemple aux États-Unis d'Amérique où l'expression « formal proof » traduit classiquement le mot démonstration , les élèves ont pu suivre un enseignement important de mathématiques sans avoir jamais été confrontés à l'apprentissage de la démonstration (Herbst 2002 p.288) ou bien cet enseignement de la démonstration – en général en classe de quatrième dans le système scolaire français – va de pair avec sa complète absence en algèbre où l'activité semble se réduire à l'exécution de « simples » calculs enchainant des transformations d'écriture. Cette tendance a un peu changé au long de la dernière décennie, avec un accent particulier sur l'enseignement de la *preuve* et une reconnaissance (implicite) de tensions entre forme et contenu qui conduit à parler de « raisonnement mathématique » (par exemple dans les « standards » proposés par le NCTM) ou de « raisonnement déductif » (par exemple dans les programmes nationaux français) au lieu de la démonstration pour elle-même qui mettrait les aspects formels sur le devant de la scène.

Cependant, quelle que soit la situation, il est reconnu que la démonstration a des caractéristiques particulières parmi lesquelles sont toujours mentionnés le genre formel du texte, son organisation spécifique et son indiscutable robustesse dès que sa correction syntaxique est assurée. Ces caractéristiques donnent aux mathématiques la réputation d'être le lieu de pratiques exceptionnelles, en comparaison aux autres disciplines scientifiques. Il doit être souligné que ces pratiques ne sont pas le résultat d'une construction intrinsèquement sociale, mais sont inhérentes à la nature même de l'objet des mathématiques.

Bref, même si la raison n'est pas encore très clairement articulée, la réponse à la question de savoir si on peut apprendre les mathématiques sans apprendre ce qu'est une démonstration et être capable d'en construire une, qu'explicita Gilbert Arsac il y a deux décennies, est « Non ». Cette position adoptée, l'enseignant, le didacticien et le mathématicien ne peuvent plus ignorer les difficultés soulevées par une double rupture : (i) une rupture entre les mathématiques et les autres disciplines scientifiques (en poussant le trait, rupture entre apodictique et expérimental) et (ii) une rupture dans le cours de l'enseignement sur les 12 années qui sont le standard (ou presque) de scolarité de base (il y a une époque avant et après l'enseignement de la démonstration).

L'origine de ces ruptures peut être retrouvée à la croisée de plusieurs lignes de tension : entre rigueur et sens, entre développement interne aux mathématiques et développement orienté par les applications, entre objets idéaux assujettis à leurs représentation et évidences tirées de l'expérience. Je n'analyserai pas ces tensions dans ce texte, je les mentionne pour évoquer la complexité des problèmes épistémologiques et didactiques auxquels nous sommes confrontés (et je suggère au lecteur intéressé par ce sujet de revenir à deux textes essentiels, Arsac 1987 et 1988).

Une source des problèmes didactiques est que l'enseignement doit prendre en compte les connaissances et les compétences initiales de l'élève. En quelque sorte, *on ne peut apprendre qu'à ceux qui savent*… Ces connaissances et compétences s'avèrent souvent être résistantes, en particulier parce qu'elles ont eu l'occasion de démontrer leur efficacité – comme cela est en particulier le cas pour les compétences argumentatives générales des jeunes adolescents. Pour dépasser cette difficulté, les enseignants organisent des situations, mises en scènes et discours, pour « convaincre » ou « persuader » les élèves – en reprenant ici le vocabulaire choisi par Harel et Sowder (1998) pour leur taxonomie des preuves. Ainsi l'argumentation paraitrait-elle être le meilleur levier ou point d'appui à l'enseignement et l'apprentissage de la preuve. Point d'appui, certes, mais aussi obstacle potentiel d'une forme de discours qui fonctionne comme un outil pour enseigner et pour faire des mathématiques, sans différence perceptible pour l'élève pendant une longue période, jusqu'à l'apparition de cette révélation inattendue : *en mathématique on n'argumente pas, on prouve*…

Pour trouver une solution, on a cherché des idées en psychologie. Au milieu du siècle dernier, le succès des théories et modèles de Piaget sur le développement de l'enfant suggérait de considérer que la preuve ne peut être enseignée qu'après que le niveau de développement mental correspondant a été atteint (le trop fameux « stade formel »). Le résultat est que la démonstration mathématique apparait soudainement (quand elle apparait) au cours de la huitième année de scolarisation, la classe de quatrième en France ; l'année des 13 ans pour la plupart des élèves dans le monde. En fait, cela ne fonctionne pas aussi bien que cela a été espéré, ce qui suggère à certains que Piaget pourrait avoir tort. A vrai dire, il manque la prise en compte d'éléments que sont le langage et les interactions sociales. Vigotski pourrait-il alors apporter une solution meilleure ? C'est ce qu'ont pu penser les tenants de l'approche socioconstructiviste, mais là encore ce n'est pas la panacée. Une solution a été recherchée dans l'épistémologie des mathématiques, en s'appuyant sur les analyses d’Imre Lakatos, mais à nouveau l’échec est difficile à cacher comme, d’ailleurs, le scepticisme de nombreux mathématiciens sur cette conception semi-empirique de leur discipline.

L’objectif du présent essai est de questionner les contraintes que les mathématiques imposent sur l’enseignement et l’apprentissage de la preuve, prenant comme postulat que, comme dans d’autres domaines, apprendre les mathématiques ne peut être détaché de la compréhension de son moyen essentiel de validation : la démonstration. La première question à aborder est celle de l’épistémologie de la preuve sur laquelle nous pourrions appuyer notre effort pour combler le vide laissé par les ruptures didactiques auxquelles nous sommes confrontés. C’est ce que je discute dans la section suivante.

1.2. Reconsidérer l’épistémologie de la preuve

Bien que cela puisse paraitre un peu simpliste, il est bon de commencer par reconnaitre que nous partageons la position selon laquelle les idées mathématiques ne sont pas affaires d’opinion ou de croyance. Elles sont de l’ordre de la connaissance au sens poppérien. Elles le sont par leur relation particulière à la preuve, comme objet et comme processus. Les mathématiques donnent des moyens pour résoudre des problèmes concrets, matériels ou sociaux, mais elles ne portent pas directement sur le « monde réel ». D’une certaine façon, les idées mathématiques portent sur des idées elles-mêmes mathématiques ; réalité d’un monde fermé difficile à accepter, mais à laquelle il est difficile d’échapper. Pour cette raison, les idées mathématiques ne viennent pas au monde comme faits, mais comme énoncés qui ne sont acceptés qu’une fois qu’ils ont été prouvés explicitement — avant cela ils ne peuvent être opérationnels ni au sein des mathématiques, ni pour leurs applications.

Cependant, malgré cette insistance sur le rôle clé de la preuve en mathématique, il doit être rappelé que l’enjeu n’est pas celui de la vérité mais de la validité des énoncés dans un contexte théorique bien défini (Habermas 1999). Bien sûr, la géométrie d’Euclide n’est pas plus vraie que la géométrie Riemannienne. Ce déplacement du vocabulaire de la vérité vers celui de la validité, qui suggère un déplacement de la preuve vers la *validation*, est plus important que ce que nous avions imaginé jusqu’ici. La validation renvoie à la construction de raisons pour accepter un énoncé spécifique dans un cadre accepté façonné par des règles et d’autres énoncés déjà acceptés. Dans cette perspective, la validation mathématique recherche une *preuve absolue* dans un *cadre explicite et complètement déterminé*, et peut donc se permettre une prétention à la certitude comme principe fondateur. La démonstration est *instrumentale* dans cette problématique.

Cette perspective sur les mathématiques est antiautoritaire au sens de Hanna et Jahnke (1996 p.891), dans la mesure où elle est fondée sur un accord pour un effort collectif et bien compris. Cette position est cohérente avec la conception classique de ce que doit être une preuve scientifique, dans la mesure où une telle preuve ne doit dépendre ni d’un individu, ni d’un intérêt social particulier. Je reconnais, avec Hanna, la valeur démocratique d’une preuve en mathématiques : prouver, dans cette discipline, est un exemple d’entreprise intellectuelle qui permet à une minorité de tenir face à l’opinion d’une majorité, en s’appuyant sur des règles communes. Jeu démocratique idéal qui renvoie à une ancienne acception de « démonstration » dans la langue anglaise comme l’explique Patricio Herbst (2002 p.287).

Ainsi, le concept de preuve n’est-il pas un concept isolé et autosuffisant ; il est indissociable des notions de « théorie » et de « validité d’un énoncé ». Ceci a été magistralement montré par l’école italienne de didactique des mathématiques, notamment dans les travaux d'Alessandra Mariotti (1997). Cependant, il nous faut réaliser que le mot « théorie » est un mot difficile. Il n'y a rien de tel qui soit disponible pour les élèves, et comprendre ce qu'il signifie semble hors de portée. Pourtant les élèves ont des idées sur les mathématiques et sur des faits mathématiques, dont ceux qui ont été présentés au cours de leur scolarité. Ils ont aussi une expérience d'argumentation en appui à la « vérité » d'une assertion qu'ils défendent ou à la « fausseté » d'un énoncé qu'ils rejettent. Mais cette expérience s'est constituée dans des contextes qui ne sont pas façonnés par une théorie au sens scientifique. L'élève doit réaliser un déplacement épistémologique essentiel pour passer d'une position pragmatique (réglée par une forme de logique de la pratique) à une position théorique (réglée par les caractéristiques explicites et exclusives d'une théorie).

Un autre point est qu'ils ne peuvent s'engager dans la validation de quoi que ce soit qui n'aurait pas trouvé les moyens d'une formulation dans un langage. Ce principe est tout à fait général (Habermas 1999) et se retrouve dans toutes les disciplines. Il joue un rôle particulier en mathématiques où l'accès aux « objets » dépend en premier lieu de leur disponibilité dans un système sémiotique (Duval 1995).

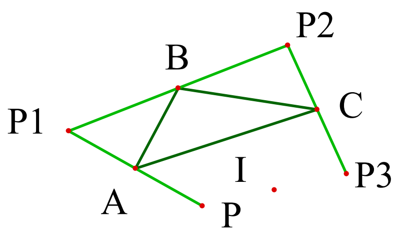
Dans la section suivante, j'explore ces relations entre connaitre, représenter et prouver en mathématiques en prenant le point de vue de l'apprenant (c'est-à-dire de l'élève sans retenir la dimension propre au contrat didactique).

2. Un modèle pour lier connaitre et prouver

2.1. Une petite histoire : le malentendu de Fabien et Isabelle

Considérons le problème suivant[1], initialement étudié dans le cadre des travaux de Sophie Soury-Lavergne (1998) sur le dialogue de tutorat entre l'élève et l'enseignant :

> Construire un triangle quelconque ABC. Construire un point P quelconque et son symétrique P_1 par rapport à A, puis le symétrique P_2 de P_1 par rapport à B, puis le symétrique P_3 de P_2 par rapport à C. Construire le milieu I de $[PP_3]$



> Que dire du point I quand on déplace P ? Expliquez.

[1] Reoris de Capponi B. (1995) Cabri-classe, fiche 4-10.

La figure a été construite avec un logiciel de géométrie dynamique[2], elle permet de constater facilement que le point I ne bouge pas quand on manipule le point P. Ce *fait* est surprenant. Le but de la situation est d'en proposer une explication.

Examinons les interactions entre l'enseignant, Isabelle, et l'élève, Fabien, à propos de ce problème[3]. Fabien a observé le *fait* mais n'a pas d'idée sur son origine. « Le point I ne bouge pas, et alors… ». Cependant il a *remarqué* et *démontré* que le quadrilatère ABCI est un parallélogramme. A cette étape, du point de vue de la géométrie (et de l'enseignant), la raison de l'immobilité de I lorsque P bouge est évidente. L'enseignant fait à Fabien plusieurs suggestions, lui prodigue des encouragements, mais sans résultat. Finalement, après des efforts infructueux, désespérée, elle tente encore : « Les autres, ils ne bougent pas. Tu vois ce que je veux dire ? Alors, comment tu pourrais le définir le point I, finalement, sans te servir des points P, P_1, P_2, P_3 ? » Tout au long de l'interaction, l'enseignante a une préoccupation qui peut être résumée par une question : *ne vois-tu pas ce que je vois* ? Mais l'évidence ne saute pas aux yeux de Fabien. C'est seulement quand Isabelle lui révèle les raisons mathématiques de l'immobilité de I qu'il s'exclame « *Ah d'accord !* », témoignant de la soudaineté de sa prise de conscience.

Afin d'expliquer l'immobilité de I, l'enseignant doit obtenir de l'élève la construction d'un lien entre monde mécanique, qui est celui de l'interface du logiciel, et monde théorique, qui est celui de la géométrie. Ce lien seul peut transformer le *fait* observé (l'immobilité de I) en un *phénomène* (l'invariance de I). Mais la construction de ce lien ne va pas de soi ; il s'agit véritablement d'un *processus de modélisation*.

L'enseignant et l'élève partageaient des représentations, des mots, des arguments qui leur permettaient de communiquer et de collaborer, mais à l'évidence ceci ne garantit pas qu'ils partagent la compréhension de ce qui est en jeu. Un effort considérable a été fait pour créer des représentations qui puissent rendre plus tangibles les propriétés des concepts mathématiques. Mais ce ne sont que des représentations dont la référence est, quoi qu'il en soit, hors de portée. Les manipuler et partager cette expérience factuelle n'assure pas le partage des significations, mais c'est le seul moyen disponible dans la mesure où, en mathématiques, la référence, au sens sémiotique, est elle-même une représentation (c'est-à-dire une entité tangible produite dans ce but).

Dans la section suivante, j'explore la question de la représentation et de sa relation avec la construction d'une signification par l'apprenant. Je donnerai quelques éléments sur la façon dont nous pouvons relever le défi de définir la « connaissance » d'une façon qui ne résoudra probablement pas ce très ancien problème épistémologique mais donnera un point d'appui pour construire un lien entre connaitre et prouver.

2.2. Confiance, doute et représentation

La fascination pour les « proofs without words »[4] (preuves sans mots) qui donneraient un accès aux raisons profondes de la validité d'un énoncé mathématique sans le tracas de la construction d'un

---

[2] Le logiciel utilisé ici est Cabri-géomètre -- http://www.cabri.com/fr/

[3] On trouvera des analyses plus précises dans Balacheff et Soury-Lavergne (1995) et Sutherland et Balacheff (1999).

[4] Voir par exemple [Claudi Alsina et Roger B. Nelsen (2006) Math made visual: creating images for understanding mathematics. Publié par Mathematical Association of America (MAA)] et encore [Roger B.

discours sophistiqué et compliqué, est un symptôme récurrent de l'espoir que certains entretiennent à propos de l'utilisation de représentations non verbales dans l'enseignement des mathématiques. Le développement des logiciels multimédia, des interfaces graphiques modernes et de l'engagement « direct » dans la manipulation des « objets » mathématiques représentés a renforcé cet espoir. L'anecdote ci-dessus à propos du malentendu entre Isabelle et Fabien est une première évidence de ce que les choses pourraient être un peu plus compliquées que ce que l'on imagine. C'est cette difficulté que je vais explorer maintenant, commençant par un exemple venant des mathématiques (professionnelles).

En 1979, Benoit Mandelbrot remarqua sur une image produite par un ordinateur et une imprimante que l'ensemble de Mandelbrot – selon une dénomination forgée par Adrien Douady – n'est pas connexe. « A striking fact, which I think is new »[5] commenta Mandelbrot. John Hubbard, qui fut un doctorant d'Adrien Douady devenu l'un de ses collaborateurs les plus connus, rapporte que…

> "Mandelbrot had sent [them] a copy of his paper, in which he announced the appearance of islands off the mainland of the Mandelbrot set M. Incidentally, these islands were in fact not there in the published paper: apparently the printer had taken them for dirt on the originals and erased them. (At that time, a printer was a human being, not a machine.) Mandelbrot had penciled them in, more or less randomly, in the copy [they] had" (Hubbard 2000 pp.3-4).

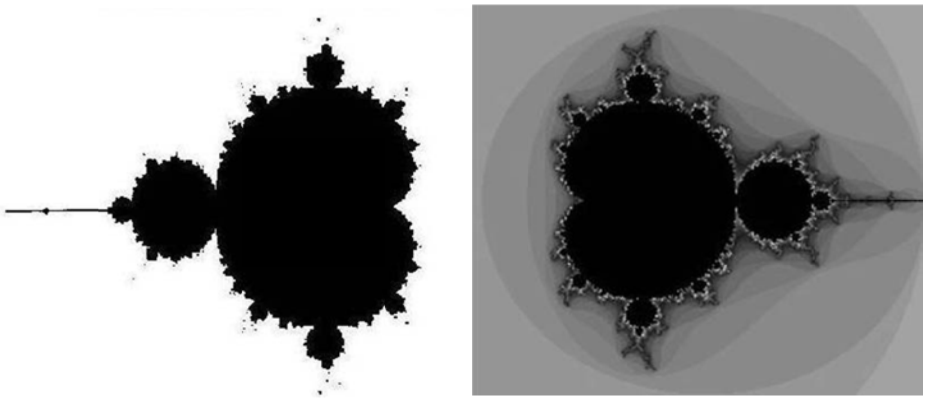
Cette anecdote rend compte de deux choses : d'une part de l'efficacité et de la force des images numériques en appui à une conjecture, d'autre part de la fragilité de cette même image qui dépend de l'algorithme et des conditions techniques de sa production. Hubbard poursuit :

> "One afternoon, Douady and I had been looking at this picture, and wondering what happened to the image of the critical point by a high iterate of the polynomial $z^2 + c$ as c takes a walk around an island. This was difficult to imagine, and we had started to suspect that there should be filaments of M connecting the islands to the mainland." (ibid.)

Adrien Douady réalisa rapidement que cela signifiait que l'ensemble M était connexe, devinant d'emblée que la preuve de cette propriété serait loin d'être évidente (Douady 1986 p.162). L'annonce de cette découverte pris la forme d'une *Note aux Comptes-rendus* en 1982. Dès lors, la représentation graphique de l'ensemble M fut transformée pour offrir de belles images (en couleur) qui, d'une certaine façon, « montrent » sa connectivité.

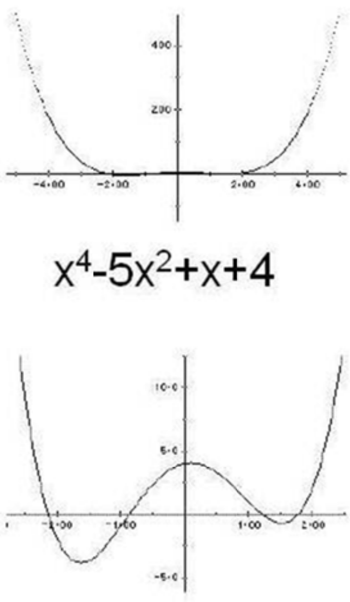
Nelsen (1993) Proofs without words: exercises in visual thinking. Publié par MAA], voir enfin Hanna (2000, esp. pp. 15-18) pour une analyse.

[5] Citation tirée dela page 250 de Mandelbrot (1980) Fractal aspects of the iteration of $z \rightarrow \lambda z(1-z)$ for complex λ and z. Annals of the New York Academy of Sciences. 357 (1) 249-259.



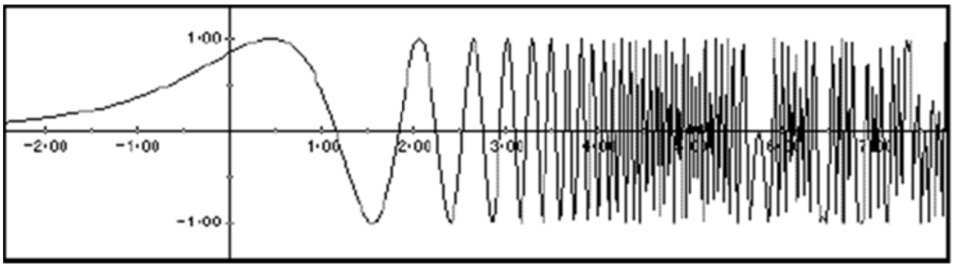
L’ensemble de Mandelbrot pour la transformation $z \rightarrow z^2+c$
avant et après la découverte de Douady et Hubbard.

Ce cas conforte l’idée de la complexité des relations entre représentation et objet mathématique ou, plus précisément, la complexité du rôle des représentations comme médiateur de la conceptualisation des « objets » mathématiques. Il nous invite à plus de prudence lorsque nous affirmons des évidences, des faits, lors de l’observation de représentations graphiques. Ceci ne signifie pas que l’expression ou la représentation non verbale d’un argument n’aurait pas de valeur, mais insiste sur le fait que l’affirmation selon laquelle un dessin vaut mieux que mille mots ne peut être retenue pour principe sans un examen minutieux. Les exemples suivants, revenant aux élèves et à l’enseignement, en sont une illustration.



Les calculatrices graphiques sont largement utilisées. Elles sont des outils efficaces de calcul et pour l’apprentissage de l’analyse, associant représentations algébriques et graphiques. Leur utilisation a conduit à de nouvelles stratégies de résolution de problèmes en tirant parti du coût très faible de l’exploration des représentations graphiques. Parmi ces stratégies, Joël Hillel (1993 p.29) relève ce qu’il appelle le « Windows shopping » qui consiste à jouer avec les possibilités offertes sur l’écran de la machine. Les illustrations ci-contre reproduisent deux images du graphe de la fonction f : $x \rightarrow x^4-5x^2+x+4$. Comme le lecteur peut le « voir » ces images peuvent conduire à des conjectures différentes sur, par exemple, le nombre de zéro de cette fonction et son comportement sur l’intervalle [-2, +2].

Il est maintenant ordinaire pour les enseignants de mettre les étudiants en garde et de leur enseigner des stratégies qui assureront une utilisation optimale et sûre de leurs machines. Pour autant, la question de savoir comment équilibrer confiance et doute lors de l’utilisation des calculatrices et de la recherche de conjectures n’a pas de réponse évidente. Pour partie cela dépend de la façon dont les élèves organisent leur exploration, mais aussi de la fiabilité des logiciels utilisés. Considérons par exemple le cas de la fonction g : $x \rightarrow \sin(e^x)$. La plupart des élèves sont prêts à étudier cette fonction sans aucun a priori sur les difficultés qui pourraient surgir jusqu’à ce que leur machine leur présente la figure suivante :

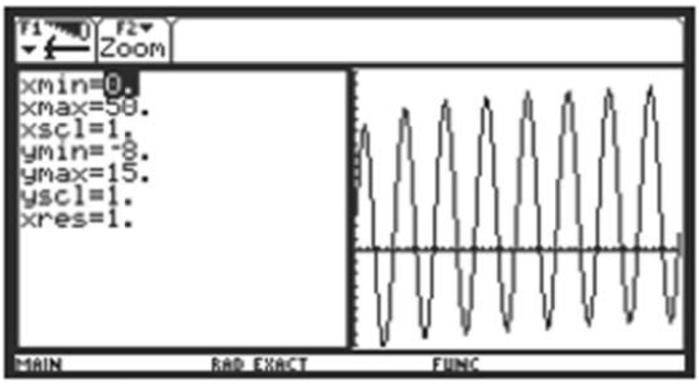


Dans ce cas le « Windows shopping » est de peu d'utilité pour répondre à la question qu'une telle représentation soulève. Une étude algébrique conduira à des questions très certainement hors de portée des connaissances dont l'élève dispose en mathématiques et en informatique. L'origine de ce qui est observé sur cette image est l'interférence entre les approximations du calcul des coordonnées de chacun des points retenus pour le tracé et le choix du pixel à noircir sur l'écran discret de la machine. Finalement, pour reprendre une expression suggérée par Adrien Douady, cette image est le résultat d'une sorte d'effet stroboscopique. Une image « correcte » serait le résultat d'une convention de notation des limitations de l'instrument de tracé et d'une stratégie de calcul sophistiquée pour déterminer l'intervalle dans lequel une représentation pertinente peut être dessinée.

Jusqu'à quel point l'élève peut croire ce qu'il voit ? Quand doit-il douter des représentations en mathématiques ? Comment peut-il les questionner ?

Les travaux de Luc Trouche (2003), sur les logiciels de calcul algébrique (CAS), montrent à quel point ces questions sont sensibles et largement présentes dans l'apprentissage de l'analyse, notamment. Ainsi, l'équation [Ln(e^x-1)=x] recevra-t-elle des propositions différentes selon que l'on utilise sur telle machine l'approche symbolique ou graphique (ibid. p.27), alors que le traitement manuel conduit assez simplement à l'expression [e^x-1=e^x] avec laquelle les élèves savent conclure. La difficulté que les élèves ont n'est pas due à l'absence de connaissances mathématiques, mais à une tendance humaine assez générale qui est de ne pas se remettre en question ou remettre en question l'environnement s'il n'y a pas de tension manifeste entre ce qui est obtenu et ce qui est attendu après une action ou une décision. L'exemple suivant est assez significatif de cette situation.

Des élèves de lycée ont été interrogés sur la limite en +∞ en de la fonction f : x ⟶ ln(x)+10sin(x)]. Sans accès à une calculatrice graphique seulement 5% des élèves répondent de façon erronée, alors que disposant d'une calculatrice graphique (voir ci-dessous) ce sont 25% des élèves qui donnent une réponse fausse (Guin et Trouche 2001 p.65).



Convenons qu'un tel constat pourrait conduire les enseignants à remettre en question l'apport de l'usage des calculatrices à l'apprentissage des mathématiques... D'autres exemples, fréquents, peuvent être donnés : la valeur de π qui serait exactement de 3,14, ou le fait qu'une suite convergente atteigne toujours sa limite. La plupart de ces erreurs, ou « misconceptions » comme on les aurait appelées dans les années 80, ne sont très probablement pas contingentes mais sont les symptômes de connaissances des élèves qui ont une légitimité dans certains contextes bien que fausses au regard des mathématiques. Pour analyser plus précisément cette question nous devons disposer d'une caractérisation des connaissances de l'élève qui, d'une part, permette de comprendre ces connaissances dans une perspective mathématique, et d'autre part, soit pertinente dans une perspective épistémique et, enfin, ouvre la possibilité d'un accès à la construction de situations didactiques qui susciteront et faciliteront les apprentissages nécessaires pour dépasser un état de connaissance erroné ou mal adapté.

2.3. Une définition phénoménologique de la connaissance

Pour désigner les connaissances des élèves à l'origine de productions fausses, des formateurs d'enseignants et chercheurs des années 80 ont choisi le terme « misconception ». Comme l'a noté Jere Confrey (1990), les erreurs des élèves, ou leurs productions « insensées », doivent être d'abord considérées comme des indications de ce qu'ils savent. Elle recommande, pour cette raison, le terme « conception » qui n'implique pas de jugement a priori et laisse ouverte la possibilité que l'élève ait de bonnes raisons d'avoir apporté telle solution à un problème, ou telle réponse à une question, ou d'avoir effectué telle réalisation pour une tâche. Je m'en tiendrai donc, moi aussi, à cette position avec pour postulat qu'une conception n'est pas le fruit du hasard, qu'elle n'est pas contingente, mais est le produit des interactions de l'apprenant avec son environnement. Par « environnement » je renvoie à un contexte aussi bien matériel que social, voire symbolique (en particulier maintenant que des systèmes symboliques dynamiques et interactifs sont mis à disposition par la technologie qui les matérialise).

Quoi qu'il en soit, seulement certaines des caractéristiques d'un environnement sont pertinentes dans la perspective d'un apprentissage. De la même façon, je ne considère pas l'individu dans toute sa complexité sociale, émotionnelle, psychologique ou physiologique, mais dans la seule dimension de la connaissance : le *sujet épistémique*. Pour ce qui est de l'environnement, je me limiterai à ce qui est pertinent dans l'interaction, le *milieu* qui peut être défini comme le *système antagoniste du sujet* dans le processus d'apprentissage (Brousseau 1997 p.57). Je ne considère ainsi que les aspects pertinents de l'environnement dans une perspective épistémique. Ceci signifie que les caractérisations du sujet (épistémique) et du milieu sont dépendantes l'une de l'autre au sens systémique (d'une façon dynamique puisque chacun évolue dans le cours du processus d'apprentissage).

Il y a une raison pragmatique à accepter cette dépendance qui tient à ce que les seules traces d'une conception sont les comportements et les productions. Notre problème est de les interpréter en termes d'indicateurs de stratégies dont la nature adaptée doit être démontrée dans le système de représentation attribué à l'apprenant (Brousseau 1997, p.215). La formalisation d'une conception que je propose plus loin a pour objectif de fournir un modèle pour instrumenter cette interprétation. Reconnaitre cette dépendance, qui est bien exprimée par Noss et Hoyles (1996 p.122) par le concept d'*abstraction située*, nous prépare à accepter que les individus peuvent manifester des conceptions différentes et éventuellement contradictoires selon les circonstances bien que nous – observateurs instruits – pencherions pour leur attribuer la même connaissance (voire le même concept).

Ainsi, je n'attacherai pas une *conception* à un sujet ou à un milieu, mais je la considèrerai comme *une propriété de l'interaction entre le sujet et le milieu* – son système antagoniste (Brousseau 1997 p.57). Le véritable enjeu de cette interaction est de satisfaire les conditions de viabilité du système sujet/milieu (ou système [S↔M]), c'est-à-dire les conditions d'un équilibre stable et la capacité de le retrouver après une perturbation (dont la manifestation tangible est un problème) – ce qui implique que cette perturbation puisse être identifiée par le sujet (par exemple une contradiction ou une incertitude) et que le milieu ait les caractéristiques qui permettent de manifester des signes tangibles de cette perturbation (sans quoi le milieu « absorberait » les erreurs et les dysfonctionnements, ou encore serait « tolérant » aux fautes).

Conception : état d'équilibre d'une boucle action/rétroaction du système [sujet↔milieu] sous des contraintes proscriptives de viabilité.

A partir de cette définition de *conception* nous pouvons dériver une définition de *connaissance* en la caractérisant comme un ensemble de conceptions. Cette définition a l'avantage d'être cohérente avec notre usage ordinaire du mot « connaissance » tout en permettant de comprendre des contradictions mises en évidence par le comportement de l'apprenant et le caractère non monotone de son développement. Une *conception* est en quelque sorte une *connaissance située*, en d'autres termes elle est l'*instanciation d'une connaissance* dans une situation spécifique précisée par les propriétés du milieu en jeu et les contraintes sur les relations (action/feedback) entre ce milieu et le sujet.

Cette définition de *conception* nous donne un point de départ, elle doit cependant être précisée pour être opérationnelle dans des recherches qui impliqueraient l'ingénierie de processus didactiques ou de conception d'environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH). Ceci est l'objectif du modèle cK¢[6], que je vais introduire maintenant. Ce modèle a pour ambition d'être un *outil* efficace pour représenter et analyser concrètement les corpus issus de l'observation de l'activité des élèves.

Ce modèle a par ailleurs l'ambition d'établir un pont entre connaitre et prouver en assurant un rôle plus équilibré aux contrôles relativement à celui assigné, habituellement de façon dominante, aux actions et aux représentations.

[6] cK¢ pour respectivement « conception », « connaissance » et « concept ». On peut trouver des informations plus complètes sur ce modèle en consultant le site web [ckc.imag.fr].

2.4. Un modèle pour relier connaitre et prouver : cK¢

Le rôle clé de la validation dans l'émergence de la connaissance est classique, au moins dans l'approche poppérienne (falsification) ou piagétienne (déséquilibration). La définition de *conception* proposée plus haut hérite de cette caractéristique, relevant qu'une conception n'est par nature (ou définition) pas contradictoire.

« Prouver » est l'activité intellectuelle la plus visible dans le registre de la validation, mais comme l'école italienne l'a clairement montré, elle ne peut être séparée d'un contrôle permanent de l'activité engagée dans la résolution d'un problème, à toutes ses étapes, ou dans la réalisation d'une tâche. D'une certaine façon « prouver » peut être vu comme l'achèvement ultime des processus de contrôle et de validation. Personne ne peut prétendre « connaitre » sans un engagement et une prise de responsabilité quant à la validité de la connaissance prétendue, et en retour cette connaissance fonctionne comme un moyen d'établir la validité d'une décision dans le cours de la réalisation d'une tâche, et même dans celui de la construction d'une nouvelle connaissance – particulièrement dans le cours d'un apprentissage. Dans ce sens connaitre et prouver sont étroitement liés, ce que j'exprimerai en affirmant qu'une conception est *validation-dépendante*. En d'autres termes, on peu diagnostiquer l'existence d'une conception parce qu'il y a un domaine non vide dans lequel « ça marche », dans lequel il y a les moyens de valider son usage et de mettre au défi d'éventuelles falsifications. C'est là l'essence de la formule de Vergnaud (1981 p.220) : les problèmes sont la source et le critère de la connaissance.

Vergnaud a montré que l'on peut caractériser les conceptions d'un élève avec trois composants : problèmes, systèmes de représentation et invariants opératoires (1991 p.145)[7]. J'ai repris ce modèle en ajoutant de façon explicite les structures de contrôle.

Une conception est ainsi caractérisée par un quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel les quatre éléments représentent respectivement :

- P, un ensemble de problème
  P correspond à la classe des déséquilibres que le système [S↔M] est capable de surmonter. Ou encore, en des termes mathématiques, la classe des problèmes que la conception permet de résoudre – pragmatiquement, nous pourrions parler de *sphère de pratique* de la conception.

- R, un ensemble d'opérateurs

- L, un système de représentation
  R et L permettent de décrire la boucle action/feedback qui relie sujet et milieu, ainsi que ses produits

- Σ, une structure de contrôle

  Σ décrit les éléments qui permettent le maintien de l'équilibre du système [S↔M]. Cette structure assure la cohérence de la conception, elle inclut les outils nécessaires à la prise de décision, aux choix, à l'expression de jugements sur l'utilisation d'un opérateur ou sur l'état d'un problème (résolu ou non, par exemple).

---

[7] Gérard Vergnaud a en fait proposer pour la première fois cette définition au début des années 80.

Ce modèle vise à rendre compte du système [S↔M], sans être réduit à aucune de ses composantes (S ou M). Le système de représentation, L, permet la formulation et la manipulation des opérateurs par le sujet (émetteur dans l'interaction) et la rétroaction du milieu (récepteur dans l'interaction). La structure de contrôle, Σ, permet l'expression et la discussion des moyens du sujet pour décider de l'adéquation et de la validité de son action, mais aussi les critères nécessaires au milieu pour choisir un feedback. Cette symétrie permet de prendre en compte à la fois la perspective du sujet engagé dans l'évaluation de sa propre connaissance, et la perspective du milieu pour lequel on cherchera les meilleures caractéristiques pour stimuler et accompagner un apprentissage. Plus encore, cela donne un cadre pour décrire, analyser et comprendre la complexité didactique de l'apprentissage de la preuve en prenant en compte, d'une façon plus liée, des dimensions interdépendantes ; celles du sujet, du milieu et de la situation qui permet leurs interactions.

Dans la dernière section de cet essai, je donnerai une illustration du rôle tout particulier de la structure de contrôle et de la lumière qu'elle jette sur les comportements de l'apprenant que nous observons et que nous souhaitons comprendre. Je conclurai par une synthèse sur le cadre présenté, et une discussion sur les relations que nous devrions établir entre action, formulation et validation dans le but de comprendre la complexité didactique de l'apprentissage et de l'enseignement de la démonstration en mathématiques. Ces trois dimensions apportent les matériaux dont nous avons besoin pour construire le pont entre connaitre et prouver.

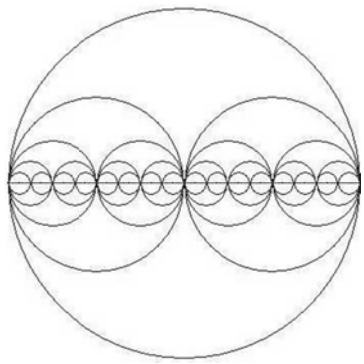
3. Prouver dans une perspective d'apprentissage

3.1. Une petite histoire : le décalage entre Vincent et Ludovic

Vincent et Ludovic sont deux élèves de collège. Ils n'ont pas de difficultés particulières en mathématiques. Ils se sont portés volontaires pour participer à une expérience que Bettina Pedemonte (2002) avait organisée pour étudier l'unité cognitive entre résolution de problème et preuve.

Le problème était le suivant :

> A partir d'un segment AB, on construit un cercle ayant AB comme diamètre.
>
> Partager AB en deux parties égales, AC et CB. On construit deux cercles ayant pour diamètres respectivement AC et CB. On continue à découper les segments résultant en deux moitiés, et on construit sur ces parties les cercles ayant pour diamètres ces segments.
>
> Comment varie la longueur totale des périmètres ?
>
> Comment varie l'aire totale des cercles ?



Sans hésitation les deux élèves expriment, avec les formules usuelles, le périmètre et l'aire de la figure pour les premières étapes de construction. Puis ils conjecturent que le périmètre est constant et que l'aire décroit vers zéro. Mais Vincent remarque : « L'aire elle est toujours devisée par 2… donc, à la limite ? La limite est une ligne, le segment dont on est parti … », et il continue :

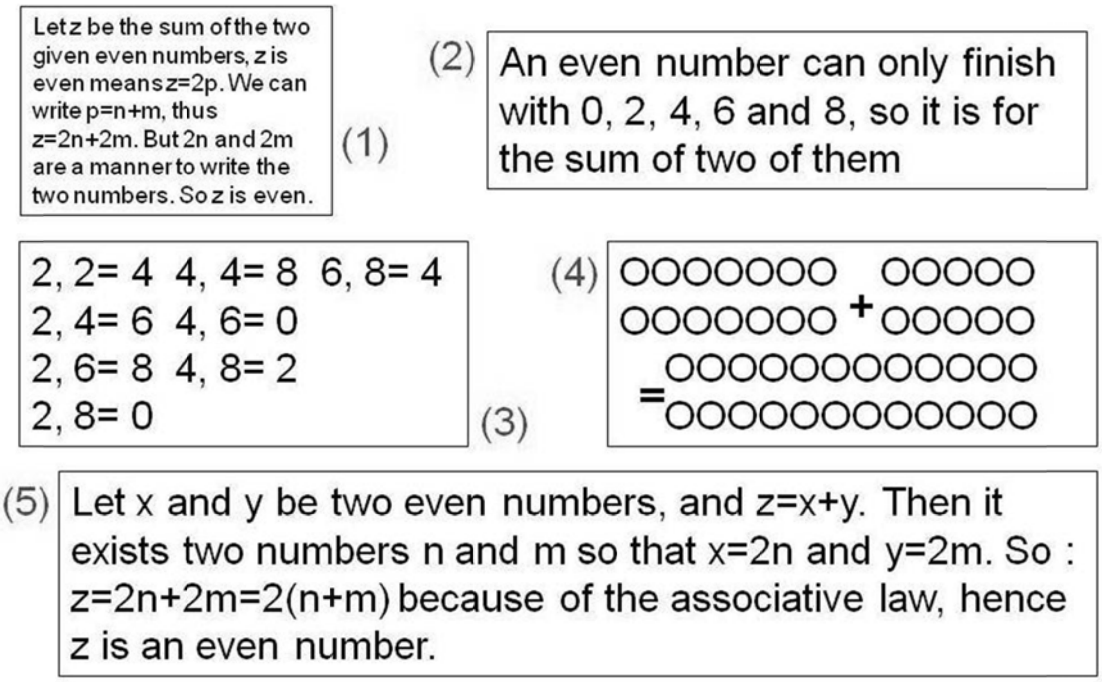
41. Vincent : ça tombe sur le segment… si les cercles sont tellement petits
42. Ludovic : hum… mais ce sera toujours 2πr
43. Vincent: oui mais quand l'aire tend à zéro ça sera presque égal…
44. Ludovic : non, je pense non
45. Vincent : si on fait tendre à zéro l'aire on fait tendre le périmètre aussi… je ne sais pas…
46. Ludovic : Je finis la première démonstration

Bien que Vincent et Ludovic collaborent activement et semblent partager les mathématiques en jeu dans cette situation, les types de contrôles qu'ils mettent en œuvre dans la résolution de ce problème sont de natures relativement différentes. Ludovic travaille dans le cadre algébrique au sens de Régine Douady (1985). Le contrôle est fourni par l'évidence de la correction des manipulations algébriques et la connaissance que Ludovic a de l'algèbre élémentaire. Vincent travaille dans le cadre de l'arithmétique symbolique dans lequel le contrôle vient d'une confrontation constante entre la formule qui « désigne » et ce qui est « montré » dans l'espace graphique de la feuille de papier. Les lettres dans ce dernier cas représentent des quantités et les formules sont une autre description de la réalité que le dessin donne à voir. Les deux étudiants ont compris la situation initiale de la même façon, tous les deux manipulant syntactiquement la représentation symbolique de la même manière (i.e. les formules de l'aire et du périmètre), mais leurs contrôles sur ce qu'ils font sont de natures différentes révélant par-là que les conceptions qu'ils mobilisent sont en fait significativement distinctes. De ce fait, nous pouvons aussi prétendre que les opérateurs qu'ils manipulent (écritures algébriques, croquis, dessins géométriques), bien que coïncidant dans une perspective comportementale, sont sémantiquement différents. Plus encore, à partir de ce constat un observateur pourrait affirmer que ces élèves, finalement, ne résolvent pas le même « problème ». Vincent est estomaqué par la rupture entre ce qu'il voit et ce qu'il calcule, et Ludovic est « aveugle » à cette rupture – en fait sa connaissance en analyse ne serait pas suffisante pour permettre de produire une explication qui serait pertinente.

La représentation symbolique joue le rôle d'un médiateur sémiotique entre les deux conceptions. Elle permet la communication entre les deux élèves, et est instrumentale pour le contrôle du processus de résolution de problème et la construction d'une preuve. S'il est entendu que deux représentations différentes peuvent attester de compréhensions différentes, nous voyons ici qu'une même représentation peut instrumenter deux compréhensions différentes et donc deux preuves différentes.

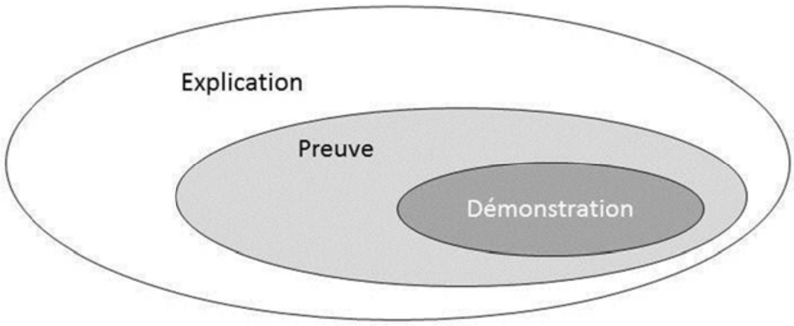
3.2. La nature complexe de la preuve

Que peut-on retenir ou accepter pour preuve ? Nous connaissons de nombreuses tentatives pour apporter une réponse à cette question soit à partir de problématiques épistémologiques (Arsac 1987), soit à partir de problématiques didactiques ou éducatives (Arsac 1988, Balacheff 2008). Je suggèrerais, et il ne s'agit pas simplement d'être prudent, qu'il n'y a pas de réponse unique et définitive. Lorsque l'on considère la discussion de Vincent et Ludovic, on peut constater la confirmation de ce que le caractère formel de la preuve n'est pas suffisant. Nous rappelant l'une des belles anecdotes de l'histoire des mathématiques, Vincent pourrait dire à Ludovic : *je le vois, mais je ne le crois pas*. Comme plusieurs auteurs le soulignent, une preuve doit pouvoir satisfaire le besoin d'explication. Cependant, son caractère explicatif peut être l'objet d'un désaccord plus difficile encore à dépasser que celui qui serait suscité par la question de sa rigueur. Une expérience intéressante de ce point de vue est fournie par les discussions autour des « preuves » suggérées à l'appui d'un énoncé très simple, avec des mathématiciens, des enseignants, ou de futurs enseignants ou des élèves.



Exemple adapté de Healey et Hoyles (2000 p.400)

Les arguments dans une telle discussion peuvent être rangés dans trois catégories qui correspondent à des préoccupations de caractère critique : la recherche d'une certitude, la recherche d'une compréhension et la satisfaction des conditions d'une communication efficace. La nature complexe des preuves vient de ce que tout effort pour améliorer une possible preuve sur l'une de ces catégories peut changer sa valeur sur les deux autres. Il n'y a pas de standard clair pour décider de l'équilibre correct, ce qui peut expliquer que réduire l'évaluation à la question de la certitude est une façon de jouer sans risque – au reste, cette dimension est obligatoire pour la transformation d'une idée mathématique en un savoir. Une telle réduction n'est pas viable dans une perspective d'apprentissage. En particulier au tout début, quand les étudiants sont introduits au concept de preuve, spécialement parce que leur activité était jusque-là régulée par un type de contrôle qui doit évoluer. Il nous est nécessaire de trouver le moyen de donner un statut à quelque chose qui sera probablement différent de ce qu'est une preuve au sens des mathématiciens mais qui aurait encore du sens en tant qu'activité mathématique. Cette préoccupation a guidé ma proposition de structurer les relations entre explication, preuve et démonstration (preuve au sens mathématique) dès le début de mes travaux sur ces questions (Balacheff 1988).



La raison de cette organisation est le postulat que le pouvoir explicatif d'un texte (et éventuellement d'un discours « non textuel ») est directement lié à la qualité et à la densité de ses racines dans la connaissance de son auteur, apprenant ou mathématicien. Ce qui est produit en premier lieu est une « explication » de la validité de l'énoncé en jeu de son point de vue. Ce texte peut atteindre le statut de preuve s'il a assez de soutien d'une communauté qui le reconnait pour tel et l'accepte. Finalement, il pourra revendiquer le statut de preuve mathématique s'il satisfait les standards de la pratique mathématique courante (longtemps bien représentés par la démonstration héritée d'Euclide). Ceci signifie que la clé de voute de la problématique de la preuve en mathématiques (et probablement dans d'autres domaines) est la nature de la relation entre les connaissances du sujet et ce qu'il engage dans ce qui peut devenir une preuve.

La reconnaissance de l'ancrage de « prouver » dans « connaitre » peut avoir justifié l'affirmation très forte de Harel et Sowder (1998 p.275) qui énonce que les schèmes de preuve sont très idiosyncratique et peuvent varier d'un domaine à un autre, jusqu'au sein des mathématiques elles-mêmes. Cette affirmation manque, cependant, la dimension sociale de la preuve qui transcende la réalité d'un sentiment strictement individuel de la compréhension et du vrai (et dépasse les niveaux psychique de la « persuasion » et de la « conviction » mentionnés par ces auteurs, ibid. p.242). Dans une perspective didactique la question est de nature épistémique, étant guidée par le rôle que joue la preuve dans la construction du lien entre une théorie qui lui donne un cadre et des moyens, et un énoncé qu'elle vise à valider. La transcendance de la preuve, comme cela est analysé par Habermas (op.cit.) est une exigence de toute problématique du vrai et de la justification, une dimension trop souvent oubliée au bénéfice des seules analyses psychologique ou sociologique. *L'affirmation de cette transcendance n'est pas une prise de position dogmatique mais, au contraire, pragmatique. Elle permet de reconnaitre la construction d'une connaissance comme un bien collectif qui peut être partagé et durable sans dépendre d'un auteur ou des circonstances de sa naissance*. Les aspects techniques de la preuve en mathématiques, la démonstration, sont ainsi instrumentaux pour son usage dans cette discipline particulière, et peuvent être acceptés une fois qu'il est compris qu'ils sont le prix d'une construction viable des mathématiques en tant que telles. De ce point vue, la rigueur formelle est une arme contre le biais de « schèmes de preuve idiosyncratiques » (Harel et Sowder, ibid.) qui pourraient être mis en avant.

3.3. Connaitre et prouver dans la genèse didactique de la preuve

L'apprentissage des mathématiques commence très tôt, dès les premiers moments de la scolarité, au moins dans une perspective institutionnelle. Comme cela est largement documenté, les apprenants à ces niveaux élémentaires dépendent autant de leur expérience que de l'enseignant comme référence pour distinguer ce qui relève de leurs opinions, de leurs croyances et de leurs connaissances. Le critère pour de telles distinctions se trouve soit dans l'efficience vérifiable de la connaissance qu'ils mobilisent, soit dans les validations ad hoc de l'enseignant. Mais comme l'enseignant lui-même doit s'effacer derrière la connaissance pour marquer que l'autorité n'est pas la référence ultime, efficience et évidence tangibles sont les meilleurs moyens de confirmer la validité d'un énoncé : *c'est vrai parce qu'on a vérifié que cela marche*. L'apprenti mathématicien est d'abord pragmatique, pour entrer « en mathématiques » il doit changer sa posture et devenir théoricien. Ce mouvement peut facilement être attesté dans le passage d'une géométrie pratique (géométrie des dessins et des formes) à une géométrie théorique (déductive et axiomatique), ou d'une arithmétique symbolique (celle du calcul sur des quantités et des lettres) à l'algèbre. La transition de la posture de praticien à celle de théoricien est confrontée à la difficulté du passage d'un connaissance en acte à une connaissance exprimée dans un discours -- l'origine de la connaissance est dans l'action, mais la forme achevée de la preuve est langagière.

A nouveau la construction d'une relation étroite entre action, formulation (système sémiotique) et validation (structure de contrôle) s'impose. Ce triplet qui saisit la nature profonde d'une conception, façonne aussi les situations didactiques : il n'y a pas de validation possible sans la formulation explicite et partageable d'une assertion, il n'y a pas de représentation sans une sémantique qui émerge d'une activité (interaction de l'apprenant avec « son » milieu mathématique).

Bien sûr, ce passage des mathématiques comme outil dont les raisons sont « transparentes », aux mathématiques comme édifice théoriquement fondé au service de la construction et de l'évaluation explicite d'une validation est dépendant d'une pierre d'angle : le langage. Le langage comme technologie symbolique au sens de Bishop (1991 p.82 sqq.) et pas seulement comme instrument d'interaction sociale et de communication. C'est à cette condition que l'apprenant peut comprendre et s'approprier la valeur de la démonstration, et prendre de la distance avec les preuves pragmatiques et empiriques qui lui étaient familières. Cependant, les langages en questions peuvent être de nature très différente jusqu'à atteindre le niveau du « formalisme naïf » des mathématiciens, avec pour contrainte que le niveau de preuve qui peut être atteint est borné par le niveau de connaissance disponible (qui n'est pas un niveau de développement psychologique intrinsèque). Il y a, dans cet espace, la place pour une activité mathématique authentique pour autant que les élèves aient progressé au-delà de l'empirisme et perçu la valeur ajoutée d'une posture théorique.

4. Un problème toujours ouvert : les situations

Après quelques dizaines d'années de recherche, un consensus a été trouvé sur la variété des significations que le mot « preuve » peut avoir pour les élèves (et peut être pour les enseignants eux-mêmes). Plusieurs classifications sont disponibles et de nombreux aspects de la complexité de la démonstration ont été explorés. Bien qu'il y ait, parmi les chercheurs eux-mêmes, des différences significatives (Balacheff 2008), on peut probablement prétendre qu'il y a une convergence sur le fait de considérer la démonstration comme le défi central de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques : connaissance mathématique et démonstration ne peuvent être séparées.

Si ce défi est compris dans une perspective épistémologique, et plutôt bien documenté, il en va bien autrement dans une perspective didactique pour laquelle la situation reste plutôt confuse. Il y a eu beaucoup d'efforts pour proposer des problèmes et des activités mathématiques qui auraient un potentiel sérieux pour faciliter l'apprentissage de la démonstration. Au tournant du XX° siècle la recherche en informatique, en intelligence artificielle et sur les interactions entre personnes et systèmes ont fait de tel progrès qu'il est possible de fournir aux élèves et aux enseignants des environnements numériques qui produisent des feedbacks sur leurs activités avec une pertinence remarquable au regard de critères mathématiques. Ceci est parfaitement illustré par la géométrie dynamique et les CAS qui permettent conjectures, réfutation et explorations mathématiques d'une façon qui n'a jamais été possible auparavant (e.g. Koedinger et Anderson 1993, Cobo *et al.* 2007, Luengo 1997), et donc d'accéder à la dialectique nécessaire pour appuyer l'apprentissage de la preuve. Pourtant, on peut toujours observer que des apprenants peuvent rester dans une posture pragmatique et ne pas voir l'intérêt de la démonstration et ses avantages. Que faire ?

Le pas ultime qu'il nous faut franchir est celui qui permettra de caractériser les situations qui auraient pour propriété de disqualifier ces postures pragmatiques en montrant qu'elles ne sont ni fiables, ni économiques, et ainsi mettraient en évidence les avantages d'une posture théorique. Ceci signifie en particulier que résoudre un problème n'est plus l'essentiel ou n'est plus la finalité de la situation, et que viendrait sur le devant de la scène la question de savoir comment la « validité » d'une solution peut être assurée. Les situations d'interaction sociale et les situations de défi sont des leviers pour modifier la nature de l'engagement des élèves dans un processus et un débat de preuve. Les travaux d'Arsac, Bartolini-Bussi, Boero, Legrand et d'autres encore fournissent des exemples qui vont dans ce sens. Le défi scientifique est maintenant de comprendre les caractéristiques de ces situations et de proposer un modèle pour les concevoir et peut être, de façon plus urgente encore, pour apporter des réponses aux questions que les enseignants posent dans ce domaine.

Références

Arsac G. (1987) L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 8 (3), 267-312

Arsac G. (1988) Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en didactique des mathématiques*. 9 (3) 247-280

Balacheff N. (1988) *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des éléves de Collège*. (Vol. 1 & 2). Thèse d'état. Grenoble: Université Joseph Fourier. [http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00326426/fr/]

Balacheff N. (2008) The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof*. ZDM Mathematics Education*. 40, 501–512

Balacheff N., Sophie Soury-Lavergne (1995) Analyse du rôle de l'enseignant dans une situation de préceptorat à distance : TéléCabri. In : Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (eds.) *Actes de la VII° Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp.47-56). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

Bishop A. (1991) *Mathematical enculturation*. Berlin : Springer.

Brousseau G. (1997) *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cobo, P., Fortuny, J.M., Puertas, E. et Richard, P.R. (2007). AgentGeom : a multiagent system for pedagogical support in a geometric proof problem. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 12, 57-79

Confrey J. (1990) A review of the research on students conceptions in mathematics, science, and programming. In: Courtney C. (ed.) *Review of research in education*. 16, 3-56.

Douady A. (1986) Julia sets and the Mandelbrot set. In: Peitgen H.-O., Richter P. H. (eds*) The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems* (pp.161-173). Berlin: Springer Verlag.

Douady R. (1985). The interplay between different settings: Tool object dialectic in the extension of mathematical ability (pp.33-52). In L. Streefland (ed*.) Proceedings of the IX International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Noodwijkerhout, Holland.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

Eemeren (van) F. H., Grootendorst R., Snoeck Henkemans F. (2002) *Argumentation: Analysis, Evaluation, Presentation*. Lawrence Erlbaum Associates.

Guin D., Trouche L . (2001) Analyser l'usage didactique d'un EIAH en mathématiques : une tâche nécessairement complexe. *Sciences et Techniques Educatives* 8(1/2) 61-74

Habermas J. (1999) *Vérité et justification*. Trad. Française : Gallimard, Paris, 2001.

Hanna G., Janke N. (1996) Proof and proving. In: Bishop A. et al. (eds.) *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer Acad. Pub.

Hanna G. (2000) Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics* 44, 5–23.

Harel G., Sowder (1998) Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In: Schonfeld A., Kaput J., and E. Dubinsky E. (eds*.) Research in collegiate mathematics education III*. (Issues in Mathematics Education, Volume 7, pp. 234-282). American Mathematical Society.

Healy L., Hoyles C. (2000) A Study of Proof Conceptions in Algebra*. Journal for Research in Mathematics Education*. 31 (4) 396–428

Herbst P. (2002) Establishing a custom of proving in american school geometry: evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics* 49 (3) 283-312

Hillel J. (1993) Computer Algebra Systems as Cognitive Technologies: Implication for the Practice of Mathematics Education. In C. Keitel & K. Ruthven (eds.) *Learning through computers: mathematics and educational technology* (pp.18-47). Berlin: Springer Verlag.

Hubbard J. (2000) Preface to Tan Lei (ed.) The Mandelbrot Set, Theme and Variations (pp.1-8). *London Mathematical Society Lecture Note Series*, 274. Cambridge University Press

Koedinger K. R., Anderson J. R. (1993) Effective use of intelligent software in high school maths classrooms. In: *Proceedings of the world conference on AI and Education*. Charlottesville, VA: AACE.

Luengo V. (1997) *Cabri-Euclide. Un micromonde de preuve intégrant la réfutation*. Thèse. Université Joseph Fourier -- Grenoble 1.

Mariotti M.A. (1997) Justifying and Proving in Geometry: the mediation of a microworld. Revised and extended version of the version published in: Hejny M., Novotna J. (eds.) *Proceedings of the European Conference on Mathematical Education* (pp.21-26). Prague: Prometheus Publishing House.

Noss R., Celia Hoyles C. (1996) *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers*. Berlin: Springer Verlag

Pedemonte B. (2002) *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Thèse. Grenoble : Université Joseph Fourier [http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004579/fr/]

Soury-Lavergne S. (1998) *Etayage et explication dans le préceptorat distant, le cas de TéléCabri*. Thèse. Grenoble : Université Joseph Fourier (Grenoble 1) [http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004906/fr/]

Stewart J. (1994) *Un système cognitif sans neurones : les capacités d'adaptation, d'apprentissage et de mémoire du système immunitaire*. Intellectika 18, 15-43.

Sutherland R., Balacheff N. (1999) Didactical complexity of computational environments for the learning of mathematics*. International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 4, pp. 1-26.

Trouche L. (2003) *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations.* Mémoire d'habilitation à diriger des recherches. Paris : Université de Paris VII. [http://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190091/fr/]

Usiskin Z. (2007) What should Not Be in the algebra and geometry curricula of average college-bound students? *Mathematics teacher*. 100, pp.68-77

Vergnaud G. (1981) Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 2(2) 215-231.

Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10(2/3) 133-169.