

EMERGENCIA DE LA NEGATIVIDAD EN LOS NÚMEROS RACIONALES

Gil Saavedra, Aurora Gallardo

Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
(CINVESTAV)

gsaavedra@cinvestav.mx, agallardo@cinvestav.mx

En el presente artículo se expone el anteproyecto de investigación que aborda una temática poco estudiada dentro de la matemática educativa: los conceptos de números fraccionarios, decimales (en el ámbito de la proporcionalidad) y su conjugación con la negatividad. Nuestro marco teórico contempla los estudios sobre fracciones realizados por Kieren, fracciones y razones abordados por Freudenthal, decimales desarrollados por Ávila y fracciones negativas hecho por Saavedra y Gallardo. El objetivo principal es conocer los significados que los estudiantes de secundaria y los normalistas poseen para cada uno de los conceptos mencionados. Cada uno de ellos representa una tarea compleja dentro del aula. No debe ignorarse el entramado trayecto que la negatividad ha tenido dentro de las matemáticas. Además nos interesa analizar si la asimilación de estos conceptos puede extenderse hacia otras asignaturas como Ciencias en Secundaria.

Palabras claves: Fracción, decimal, negativo, significado.

Introducción

Para los profesores de educación básica es conocida la dificultad en el tratamiento de temas relacionados con las fracciones dentro del aula. El caso de los decimales presenta circunstancias similares al ser abordados en el trabajo escolar. En ambas situaciones el desarrollo de estos temas pareciera centrarse en el tratamiento de las operaciones aritméticas, dejando de lado la naturaleza propia de estos conjuntos numéricos y por ende, la interpretación, sentido y significado que los estudiantes poseen de éstos.

La cuestión de la negatividad no es menos azarosa, la historia advierte la clandestinidad de los números negativos y las vicisitudes que hubieron de pasar para formar parte de nuestros conceptos matemáticos actuales (Gallardo, 1994, 2002). Recordemos la categoría de la negatividad acuñada por Lizcano (1993), quien hace referencia a los antecedentes históricos de los números negativos y aclara que éstos no podrían considerarse aún como los enteros de hoy, y es necesario mantener voluntariamente impreciso el término de negatividad para poder ampliar paulatinamente su campo de referencia y ser así aceptadas sus diversas construcciones en las distintas culturas.

Planteamiento del problema

Estudios recientes han puesto de manifiesto un escaso tratamiento de los números racionales tanto en la forma de expresarlos como fracciones (Saavedra, 2011), como decimales (Ávila, 2008). Se ha encontrado evidencia sobre la nimia comprensión que de estos números tienen los docentes y alumnos (Fazio y Siegler, 2010). Vamvakoussi y Vosniadou (2010) afirman que comprender fracciones es esencial para el aprendizaje de álgebra, geometría y otros ámbitos de la matemática escolar.

Hemos indagado sobre estos temas tanto en los alumnos de educación básica, como en profesores en formación, ya que existen razonamientos intuitivos guiados por modelos erróneos prevalecientes desde la educación primaria hasta la universidad al trabajar con números decimales (Brousseau, 1980), situación que puede ser extendida a las fracciones debido a su equivocada asociación a las reglas de los números naturales. Por lo tanto, consideramos que es importante investigar las ventajas que se obtendrían al trabajar los conceptos de fracción y decimal asociándolos a la negatividad en los estudiantes de secundaria involucrados en otras asignaturas, como por ejemplo Ciencias II énfasis en Física. Este hecho permitiría validar la hipótesis propuesta por Saavedra y Gallardo quienes mencionan:

[...] los alumnos no resuelven problemas de cinemática utilizando álgebra porque no entienden entre otros los conceptos de velocidad y aceleración como razones de cambio ni como cantidades relativas que involucran números positivos y negativos. Afrontan los problemas que describen el movimiento generalmente con acercamientos aritméticos o gráficos. (Saavedra y Gallardo, 2011, p. 368)

Estos autores también aseveran que “Muchos estudiantes olvidan las unidades asociadas a las magnitudes físicas que les permitirían asegurarse que el problema está bien planteado”. Lo que comúnmente denominamos análisis dimensional (Saavedra y Gallardo, 2013, p. 55).

Nuestro estudio se realiza en Telesecundaria. En este subsistema el profesor imparte todas las asignaturas (S. E. P., 2011). Además, hemos considerado a los docentes de telesecundaria en formación con la intención de verificar el grado de dominio que poseen sobre estos conceptos matemáticos; y también, con el propósito de, mediante entrevista con enseñanza, acercarlos más al concepto formal de número negativo. Por entrevista con enseñanza nos referimos a la interacción que el investigador realizará durante las entrevistas, brindando la ayuda necesaria para contribuir a que tanto estudiantes de secundaria como normalistas desarrollen los conceptos en los ítems planteados.

Nos hemos planteado las siguientes preguntas de investigación:

¿Cuáles son los significados tanto de fracciones como de decimales que poseen los estudiantes y normalistas de telesecundaria?

¿Cómo influyen los conceptos de fracciones y decimales negativos que tienen los normalistas y los estudiantes en otras asignaturas?

Marco Teórico

Para Kieren (1983, 1988) los números racionales representan un sistema sofisticado de conocimiento para modelar situaciones reales, y son uno de los ejemplos más importantes del concepto matemático de campo. Para él, la construcción de la fracción comprende el control de operadores aditivos y multiplicativos; es un proceso que incluye experiencias matemáticas y contenidos del pensamiento tales como la identificación de partes y formación de equivalencias usando una variedad de imágenes y madurando desde lo metafórico hasta el uso del lenguaje formal. El tema de Fracciones está dotado de múltiples constructos, a saber: cociente, medida, operador, razón y la relación parte-todo (Kieren, 1983, 1984, 1988).

Así mismo, Freudenthal (1983) identifica didácticamente a las fracciones como números racionales, cuando éstas surgen de un modo muy concreto, adoptando el sentido de “fracturadores”, “comparadores” y “operadores multiplicativos”. Denomina fracción a las distintas expresiones del mismo número racional (por ejemplo, el número racional $\frac{1}{2}$ puede estar representado por las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$, etc.). Este autor hace hincapié en la polifacética sobrevivencia de las fracciones a nivel del lenguaje cotidiano. Aclara también la conveniencia al denominar Razón a un par ordenado de números de la forma $\frac{p}{q}$ (igual que las fracciones), vinculados a la proporcionalidad, con la anotación de que si se le interpretara como un cociente, es decir p dividido por q , se pierde el sentido ligado a la función que la ha originado, a pesar de conservar el mismo valor numérico, pues el significado de razón es hablar sobre la relación entre magnitudes, independientemente del tamaño de las mismas.

Por otra parte, el número decimal tiene aplicación en la vida cotidiana y son útiles en otros contextos de proporcionalidad, por ejemplo en los porcentajes (Block y Mendoza, 2010): conversiones de moneda, cálculo de costos, etc. Al referirse a los decimales, Brousseau (1980) menciona que en las matemáticas escolares, se encuentran obstáculos del tipo didáctico, epistemológico e histórico.

Con respecto a la negatividad, Gallardo (1994, 2002) realizó un estudio mostrando evidencias de que los negativos constituyen un obstáculo para la enseñanza del álgebra escolar. Una de sus conclusiones exhibe que la extensión del dominio numérico de los

números naturales a los enteros se convierte en un elemento crucial para lograr la competencia algebraica en la resolución de problemas y ecuaciones.

Además, esta autora advirtió que los estudiantes de secundaria dotaban de sentidos intermedios al entero, a saber: número sustractivo, número signado, número relativo y número aislado en la resolución de tareas aritmético – algebraicas antes de lograr la extensión del dominio de los números naturales a los enteros.

Así mismo, el trabajo realizado por Saavedra (2011), muestra que es posible ampliar el dominio a los números fraccionarios y es concebible realizar la extensión hacia los números decimales.

Es conveniente hacer notar que un punto de convergencia tanto de los decimales como de fracciones se encuentra en el constructo de razón, del cual Fernández y Puig (2002) sostienen que “es una función de un par ordenado (antecedente y consecuente) de números o de valores de una magnitud” (p. 402). Freudenthal (1983) sugiere que al leer la razón como fracción, haciéndole corresponder su valor numérico al efectuar la división de los componentes del par ordenado, la razón desaparece y “se priva a la razón de lo que la hace valiosa como razón” (p. 179) dado que el número decimal resultante puede representar el mismo valor numéricamente hablando pero pierde el sentido de la relación entre magnitudes a la cual se hace referencia.

La proporcionalidad tiene como fundamento también al concepto de razón y es, de acuerdo con lo descrito por Mochón (2012), “una de las ideas principales presentes en todos los niveles de las matemáticas escolares y es fundamental en la estructura descriptiva de la física y de otras ciencias” (p. 134). Es importante destacar este hecho debido a que en nuestro estudio pretendemos observar el tránsito del razonamiento aplicado en las fracciones y los decimales negativos hacia otras actividades del conocimiento tratadas en la escuela. Como se ha descrito anteriormente, la razón, la proporcionalidad, los porcentajes (que son razones sobre 100), las fracciones y los decimales, se encuentran en un juego continuo y permanente en este punto de unión (Block y Mendoza, 2010).

Lo anterior pone de manifiesto la relevancia del estudio de las fracciones y los decimales, y más aún su asociación a la negatividad, pues nos enfrentamos a obstáculos o momentos de ruptura, y es precisamente hacia estos puntos coyunturales donde pretendemos que los estudiantes y profesores en formación de telesecundaria (normalistas) se enfrenten.

Método

Se recurre a una investigación de corte cualitativo, ya que este paradigma hace aportaciones importantes sobre los procesos cognitivos del sujeto durante la adquisición de conceptos matemáticos (Gallardo, 1996).

Nuestra población corresponde a un grupo de 35 estudiantes de segundo grado de educación secundaria y a 8 normalistas del séptimo semestre en las escuelas telesecundarias.

Se utilizan los siguientes instrumentos metodológicos:

- Cuestionario Exploratorio: Se plantean dos versiones, una para estudiantes de secundaria y otra para profesores en formación. Ambos consideran ítems con similares contenidos aunque en el caso de los docentes se ha elevado el grado de dificultad. Ambos constan de 15 ítems sobre decimales, fracciones y enteros. Nos apoyamos en la resolución de cuadrados mágicos, comparación de cantidades expresadas como fracciones y decimales, problemas históricos y del presente, referidos a contextos escolares distintos a las matemáticas tales como cinemática y de la vida cotidiana.
- Entrevista Individual: Realizada a 3 alumnos de secundaria y 2 docentes seleccionados según sus respuestas en el cuestionario exploratorio, con el fin de realizar un estudio en profundidad, tanto de los estudiantes de secundaria como de los normalistas.

La validación de los resultados recabados se realiza mediante el método de Triangulación. Se llevará a cabo la denominada Triangulación Metodológica, considerando la toma de datos con el cuestionario inicial, la información recabada durante la entrevista videograbada y mediante un cuestionario final a los alumnos entrevistados (Cohen y Manion, 1990).

Dado que se plantea el estudio de fenómenos específicos bajo una perspectiva local, resulta necesario recurrir a un constructo teórico que explique los hallazgos empíricos del tema abordado.

Filloy (1999) advierte que hay una falta de modelos teóricos paradigmáticos en la investigación en educación matemática, usando el término paradigma como el conjunto de supuestos base sobre la naturaleza y los límites del objeto propio de estudio, el método para estudiarlo y la decisión sobre qué se toma como evidencia. Introduce el concepto metodológico de Modelo Teórico Local (MTL) y asegura que las observaciones empíricas sobre cómo se usan sistemas de signos durante los intercambios de mensajes en el interior de procesos de enseñanza/aprendizaje matemáticos, y las situaciones en las que un sujeto usa estos sistemas de signos matemáticos, muestran que los procesos cognitivos entremezclan el nivel de competencia con el nivel pragmático. Este componente pragmático, que procede de la enseñanza en el que se lleva a cabo el proceso de aprendizaje, está ligada a muchos contratos socialmente institucionalizados, que incluyen no sólo los usos y las formas tradicionales en las que se emiten los mensajes de sistemas de signos en los sistemas educativos, sino también –y con mayor

importancia– la presencia usualmente ignorada de toda evolución histórica de estos sistemas matemáticos.

El modelo (MTL) tiene un carácter descriptivo, explicativo y predictivo, pero no excluye que los mismos fenómenos puedan describirse, explicarse y predecirse de otra manera, es decir, mediante otro modelo; en esto se diferencia la elaboración del modelo de la que suele acompañar a la elaboración de una teoría, que implica la exclusión de cualquier otra teoría que se utilice para explicar los mismos hechos (Puig, 2006).

Referencias Bibliográficas

- Ávila, A. (2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación Matemática*, 20 (2), 5-33.
- Block, D. y Mendoza, T. (2010). El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13 (1), 177-190.
- Brousseau, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1 (1), 11-59.
- Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.
- Fazio, L. y Siegler, R. (2010). *Enseñanza de las fracciones*. Suiza: Academia Internacional de la Educación y la Oficina Internacional de Educación (UNESCO).
- Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Fernández, A. y Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *La Gaceta de la RSME*, 5(2), 397 – 416.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Holland: Reidel Publishing Company. (pp. 133-209).
- Gallardo, A. (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Gallardo, A. (1996). El paradigma cualitativo en matemática educativa: Elementos teórico-metodológicos de un estudio sobre números negativos. En F. Hitt (Ed.), *Didáctica. Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 192-222), México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Gallardo, A. (2002). The extension of the natural – number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics* 49, 171-192.
- Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of Rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, 506-508.
- Kieren, T. (1988). Personal knowledge- of rational numbers: Its intuitive and formal development. *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics 2, 162-181.
- Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática*. Barcelona: Gedisa.
- Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática*, 24 (1), 113 – 156.

- Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos, en P. Bolea, M. González, y M. Moreno, (Eds.). *Investigación en Educación Matemática X*, 107-126.
- Saavedra, G. (2011). *Estudio de las fracciones negativas en educación básica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Saavedra, G. y Gallardo, A. (2011). Significado de los números negativos fraccionarios en estudiantes de secundaria. *Investigación en Educación Matemática XV*, 361-369.
- Saavedra, G. y Gallardo, A. (2013). *No sólo quebrados... ¡También Negativos!*. Madrid: Editorial Académica Española.
- S. E. P. (2011). *Modelo Educativo para el fortalecimiento de la Telesecundaria, Documento Base*. México: Dirección General de Materiales Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica.
- Vamvakoussi, X., Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, 28(2), 181-209.