LAS CERTEZAS MATEMÁTICAS: ¿OBSTÁCULO O IMPULSO PARA LA COMPRENSIÓN?

Martínez Navarro Benjamín   Rigo Lemini Mirela

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N. (Cinvestav), Mexico

bemanav@yahoo.com.mx   mrigolemini@gmail.com

En el informe de investigación se argumenta que los estados epistémicos, como las dudas o las certezas, que experimenta una persona en torno a afirmaciones matemáticas (correctas o no) actúan igualmente como un impulso y como un freno para el aprendizaje en esa disciplina. Para el análisis – de carácter etnográfico y de tipo interpretativo, y basado en datos empíricos provenientes de un foro virtual en el que participan asesores que enseñan álgebra a adultos- se proponen instrumentos teórico-metodológicos que se complementan con el Modelo de Toulmin.

Palabras claves: certeza, duda, comprensión, sustentos matemáticos.

Antecedentes y Objetivos

Tener convicciones puede dar significado a la vida y ser algo admirado por la sociedad pero puede también ser la base de conductas inapropiadas, guiadas por visiones sesgadas (Cf. Abelson, 1988).

Este papel dual de las convicciones, de incentivo y de traba, se corrobora en general y opera igualmente en los procesos evolutivos del conocimiento, concretamente, en el desarrollo histórico de las matemáticas: La geometría euclidiana, cuya veracidad se respaldó durante siglos en la certeza de que era el único 'modelo' científico del espacio físico, se cimentó implícita e incuestionadamente en una insondable convicción de continuidad(por cierto, quizás proveniente de profundas reflexiones filosófico-ontológicas). La certeza en torno al isomorfismo entre la geometría euclidiana y el espacio, y la seguridad sobre lo que ahora se conoce como la propiedad de la continuidad de la recta y la completud de los números reales, actuó hasta ya entrado el siglo XIX como un puntal, que aunque tácito e infundado, sostuvo el edificio de las matemáticas; en particular, esas propiedades, la geométrica y la analítica, asociadas a una noción de la continuidad no definida explícitamente pero sí aceptada firmemente, resaltan en la obra de Cauchy porque a pesar de ser paradigmático defensor del rigor y ejemplo de modernidad, en su 'demostración' del teorema del valor intermedio que aparece en su Cours d'Analyse (1821) considera a dichas propiedades como verdades incuestionables. Estas hondas certidumbres en torno al continuo fungieron sin duda como un soporte que permitió el desarrollo de las matemáticas, pero quizás justo por su complejidad y auto-evidencia actuaron también como un escollo, lo cual, entre otras cosas, puede explicar que el concepto se haya tematizado e incorporado formal y rigurosamente a las matemáticas hasta ya avanzado el siglo XIX (Alarcón, Rigo & Waldegg, 1994).

Desde Sócrates en el Menón (1981); siglos después en la epistemología piagetiana (Piaget, 1990), y aún hoy en día, en la teoría social del conocimiento de Wenger (2001), se plantea que la contradicción y la duda representan un papel central en el proceso de aprendizaje y la construcción de conocimientos. A diferencia de esos trabajos, en la presente investigación se sugiere una hipótesis según la cual los estados epistémicos que vivencian los estudiantes en torno a los enunciados matemáticos que surgen en ese foro pueden actuar como un freno en el avance de sus conocimientos pero a la vez como un motor en el desarrollo de otros. Para probar dicha hipótesis, se analizan participaciones que estudiantes publicaron en un foro virtual. Esas participaciones estaban relacionadas con el concepto de variable como incógnita (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005). Para el análisis empírico se acude a instrumentos teórico metodológicos que se han diseñado en el marco de la presente investigación, cuyos resultados parciales aquí se exponen, y se emplea también el Modelo de Toulmin, como para sus propios propósitos lo hacen Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, (2007), Krummheuer (1995), y Martínez y Pedemonte (2014).

Marco interpretativo

Los esquemas y estados epistémicos

Los alumnos suelen sustentar sus afirmaciones o procedimientos de contenido matemático de modos diversos. Rigo (2013) ha propuesto una clasificación de estos recursos de sustentación a los que llama "esquemas epistémicos". Según la autora mientras algunos sustentos se vertebran en torno a razones matemáticas (e.g., las instanciaciones) otros se articulan en torno a consideraciones extra-matemáticas, como los que se basan en la familiaridad (resultado de la repetición, la memorización o las costumbres) o los que se activan para evitar consecuencias inesperadas (que se aplican cuando se sostiene una afirmación porque de otras opciones se desprenden consecuencias temidas. v. Martínez & Rigo, 2014[b]). Asociadas a sus aseveraciones de contenido matemático, los sujetos pueden experimentar "estados epistémicos" de certeza (cuando le asocian el máximo grado de probabilidad a lo creído) o duda (cuando le asocian grados menores de probabilidad a lo creído). En este documento se considera que una persona (que participa en un foro virtual) vivencia un grado de certeza, o bien de presunción o duda, en un enunciado matemático, cuando cumple con alguno(s) de los criterios que aparecen en la Tabla 1 (Martínez &Rigo, 2014[a]).

Tabla 1: Instrumento para distinguir estados de certeza y presunción o duda

Elementos del habla	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice (e.g., uso del

	modo indicativo de los verbos, como tengo).
Acción	El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.
Determinación	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia a pesar de tener al colectivo en su contra, llegando a intentar convencer a otros.
Interés	Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico en un foro virtual son:
	-*Sistemáticas*. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible.
	-*Informativas*. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos (no necesariamente correctos).
Consistencia	La persona muestra consistencia en sus distintas intervenciones.

El Modelo de Toulmin

En el modelo de Toulmin (1958), un argumento está compuesto por una afirmación (A), datos (D) que apoyan la afirmación, garantías (W) que pueden ser expresadas como reglas generales que actúan como un puente entre A y D, un soporte (B) que incluye una teoría general sobre la que descansa la garantía, y los calificadores (Q).Para identificar aquí signos de comprensión/incomprensión se aplican criterios de la Tabla 2 (Martínez & Rigo, 2013b) complementados con el Modelo de Toulmin.

Tabla 2: Criterios para identificar signos de comprensión /incomprensión

	Descripción	Identificación del criterio en el Modelo de Toulmin
C1	Se activan esquemas epistémicos basados en razones matemáticas; /La persona activa esquemas epistémicos extra-matemáticos.	Aparición de esquemas epistémicos matemáticos; /Aparición de esquemas epistémicos extra-matemáticos.
C2	Se confiere a conceptos matemáticos interpretaciones que son acordes con la acepción matemática aceptada (disciplinar o escolar); /En discordancia.	A, D, W, B en concordancia con la acepción matemática aceptada; /A, D, W, B en discordancia.
C3	Perspectiva de experto: Se consideran visiones adicionales al punto de vista; /Sesgo de exploración: Se centra la atención sólo en un punto de vista.	D suficiente, W general; /D insuficiente, W ad hoc.
C4	Se explicita un punto de vista; /Punto de vista implícito.	Se explicitan D, W y/o B; /Los D, W y/o B quedan implícitos.
C5	Se muestra conocimiento mayor que el promedio;	Los A, D, W o B son más

	/Se muestra un conocimiento menor que el promedio.	frecuentemente correctos o completos en relación con sus compañeros; /Incorrectos o incompletos.

El concepto de variable

Este documento versa sobre el concepto de variable. El Modelo 3UV (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005) distingue distintos usos de la variable, algunos de los cuales se describen en la Tabla 3. Este Modelo será tomado como la acepción aceptada del concepto de variable en la matemática escolar.

Tabla 3: Aspectos de los tres usos de la variable en el modelo 3UV

La variable como incógnita	
I1	Identificar la presencia de algo desconocido que puede ser determinado.
I5	Simbolizar las cantidades desconocidas y utilizarlas para plantear ecuaciones.
I2	Interpretar la variable que aparece en una ecuación como un valor específico.
I4	Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas.
La variable como relación funcional	
F1	Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas.

Aspectos metodológicos

La investigación cualitativa que aquí se presenta está centrada en un estudio de caso de tipo interpretativo (Denzin & Lincoln, 1994) y de carácter etnográfico. El estudio empírico se llevó a cabo en el Diplomado de Temas Fundamentales de Álgebra impartido por el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (I. N. E. A., México) en el año 2013; el diplomado tiene el propósito de fortalecer la formación de personas que asesoran en temas de álgebra a adultos que se encuentran en proceso de obtener su certificado de secundaria. Las actividades de enseñanza se desarrollan a distancia, en un foro virtual, mediante el uso de la plataforma Moodle a través de la cual los estudiantes reciben apoyo, evaluación y retroalimentación por parte de un tutor. Las participaciones que aquí se analizan pertenecen al momento del diplomado en el que se comenzaban a introducir los sistemas de ecuaciones. Antes, los estudiantes habían estudiado ecuaciones lineales. Para este reporte se seleccionaron argumentos de una estudiante (Jeymi) que parece haber experimentado distintos estados epistémicos y haber activado distintos esquemas epistémicos ante la tarea propuesta. Para el análisis se organizaron esos argumentos en tablas: la primera columna incluye comentarios textuales de la alumna y la segunda, el análisis de cada argumento usando el Modelo de Toulmin (v. Tablas 1 y 2).

Análisis de resultados

El tutor solicitó a los estudiantes resolver el siguiente problema: En un salón de clases hay 61 alumnos. El número de mujeres excede al de hombres en 7. ¿Cuál es el número de hombres y mujeres? a) ¿Cuántas incógnitas tienes? b) ¿Cuáles son las literales que asignaste? ¿Qué significan? c) Trata de plantear las ecuaciones que resuelven el problema. La primera respuesta fue la de una estudiante llamada Paty, quien así respondió: a) 2 el número de hombres y de mujeres b) "h" hombres y "m" mujeres c) h+m=61; m+7=h. Como respuesta a Paty, Jeymi publicó:

Primera participación de Jeymi: certezas matemáticas como acicate y obstáculo

Tabla 4: Análisis de la primera participación usando el Modelo de Toulmin

Tus respuestas no coinciden con las mías Primeramente hay que analizar los datos; Datos: 61 alumnos; x hombres; x+7 mujeres. Hay dos datos desconocidos pero de uno se resuelve el otro Y tenemos una incógnita "x" que significa hombres	**Argumento 1** D1: a: Datos: 61 alumnos, x hombres, x+7 mujeres b: Hay dos datos desconocidos pero de uno se resuelve el otro (correcto y explícito) A1: Tenemos una incógnita x que significa hombres (incorrecto) W1: Cuando se tienen dos datos desconocidos y uno está en relación funcional con otro entonces se tiene una incógnita (ad-hoc, incorrecto e implícito) B1: a: Álgebra (razones matemáticas, en particular, noción de relación funcional (correcta) y noción de incógnita (incorrecta)) y b:Esquemas extra-matemáticos (para evitar el planteamiento de un sistema de ecuaciones)
Ahora plantearemos la ecuación x+(x+7)=61	**Argumento 2** D2: a:D1 $\rightarrow$ A1 y b: D1a (incorrecto e implícito) A2: x+(x+7)=61 (correcto) W2: a: Enlace entre los elementos de D1a (correcto e implícito) b: Si se tiene una incógnita se plantea una ecuación (correcto e implícito) B2: a: Álgebra (razones matemáticas) y b:Reglas escolares (Familiaridad)
Sumamos las x, nos queda 2x+7=61; pasemos el 7 a la derecha; se hacen cálculos; para dejar sola la x hay que dividir entre 2…y queda x=27.	**Argumento 3** D3: x+(x+7)=61 (correcto y explícito) A3: nos queda x=27 (correcto) W3: a: Sumar las x; b:Pasar el 7 a la derecha; c:Hacer las operaciones; d: Para dejar sola la x hay que dividir entre 2 ambos miembros (correcto y explícito) B3: a: Álgebra (razones matemáticas, en particular, propiedades de la igualdad) y b: Reglas escolares (Familiaridad)
Mujeres x+7=27+7=34 por lo tanto hay 34 mujeres.	**Argumento 4** D4: a: D1a y b:A3 (correcto y explícito) A4: por lo tanto hay 34 mujeres (correcto) W4: Sustitución (correcto e implícito) B4: Álgebra (razones matemáticas)

En A1 del Argumento 1, Jeymi concluyó de forma incorrecta que el problema involucraba una sola incógnita, dejando ver escasa comprensión en torno a este tema. A esa afirmación ella pareció asociarle certeza, porque en ella usó un enfatizador (‘tenemos’) que también usó en la evidencia D1b (‘hay’) en la que soportó A1, actuó a favor de dicha afirmación A1 cuando planteó la ecuación correspondiente en A2, mostró determinación al contradecir a Paty, interés por profundizar en su respuesta y consistencia en los criterios anteriores. Pareciera que el interés de Jeimy se concentró en sostener A1, es decir, en postular la existencia de sólo una incógnita (contraviniendo el significado matemático aceptado, C2, pero permitiéndole a ella permanecer en su estado de confort), para poder desprender de ello la existencia de solo una ecuación (en A2 y W2b, evitando así situaciones inesperadas, v. B1b). Esa certeza en A1, llevó posiblemente a Jeimy a dejar de considerar otros puntos de vista (C3), como el de Paty, de que en el problema hay dos datos desconocidos y por tanto hay dos incógnitas (C5); pero esa certeza en A1 la llevó también a considerar y explicitar la relación entre las variables (en D1b, acorde con F1, C2) y a sustentar con base en esa relación la veracidad de A1; esta correlación entre A1 y D1 la soportó en una garantía implícita, incorrecta y ad hoc W1 (C4,C2,C3), que sustentó en un Backing (B1b) el cual revela razones extra-matemáticas (C1). De modo que en este pasaje, la certeza de Jeimy sesgó su exploración y actuó, en síntesis, como un impedimento para la construcción de un argumento basado en Warrants y Backings matemáticos. Pero por otro lado, la confianza de Jeimy en A1, y en la relación que ella estableció entre las variables (en D1b) -que fue por cierto una de las herramientas sobresalientes de las que ella después se sirvió-, actuó como impulso para que ella continuara con determinación su resolución: en A2 ella planteó (acertadamente) la ecuación (I5) y lo hizo con certeza (porque actuó a favor cuando la resolvió y mostró determinación e interés cuando propuso una solución distinta a la de Paty); a su vez, esa certeza en A2 operó como ímpetu para que ella obtuviera (correctamente, C2) el valor de las literales en A3 y A4 (I2, I4), llegando incluso a acudir a razones matemáticas (C1) al apelar explícitamente (C4) a las propiedades de la igualdad (W3d) en lugar de la usual trasposición de términos y que, a diferencia de W1, pueden aplicarse a cualquier ecuación (C3).

Segunda participación de Jeymi: la duda como una oportunidad perdida

A la solicitud del tutor de comparar su respuesta con la de Paty, Jeimy replicó:

Tabla 5: Análisis de la segunda participación usando el modelo de Toulmin

No coincide; bueno vamos a tomar a m como el número de mujeres y h el número de hombres, sabemos que la suma de las dos cantidades nos da 61 , sería h+m=61	**Argumento 6** D6: → A6: a:Bueno vamos a tomar a m como el número de mujeres y h el número de hombres, b: sabemos que la suma de las dos cantidades nos da 61 (correcto y explícito) → sería h+m=61 (correcto) W6: Traducción literal del enunciado. (correcto e implícito) B6: a:Familiaridad (traducción literal) y b:Álgebra (relación de los datos)
pero también sabemos que el	**Argumento 7** D7: → A7: a: D6a y b: Sabemos que el número de mujeres → sería h+7=m

número de mujeres excede en 7 al número de hombres esto sería h+7=m	excede en 7 al número de hombres (correcto) (correcto) W7 : Traducción literal del enunciado (correcto e implícito) B7: a:Familiaridad(traducción literal) y b:Álgebra (relación de los datos)
bueno por lo tanto nuestro sistema de ecuaciones sería: h+m=61; h+7=m creo jeje	**Argumento 9** D9: a:A6 y b:A7 (correcto) A9: sería h+m=61; h+7=m (correcto) W9: Traducción literal del enunciado (correcto e implícito) B9: a: Familiaridad (traducción literal) y b:Álgebra (relación de los datos)

En A9 del Argumento 9 Jeymi planteó correctamente el sistema que resuelve el problema. No obstante, en torno a ese sistema ella experimentó duda, que mostró al usar el mitigador 'sería' y 'creo jeje', al dejarlo sin resolver, y al expresar desinterés por desarrollar su respuesta. A diferencia de su proceder con las literales x y y que empleó en su primera participación, Jeimy desprendió las ecuaciones del sistema (A6 y A7), entre otras cosas, de la interpretación de las literales h y m como cantidades (D6b), contraviniendo su significado como variables (en particular como I1 o F1, C2), para lo cual probablemente se apoyó en esquemas basados en la familiaridad (C1, v. B6, B7 y B9); con todo ello Jeimy dio muestras de cierta incomprensión. La incertidumbre que ella experimentó durante esta participación representó –como sugiere Sócrates en el Menón- una oportunidad de aprendizaje; sin embargo, como se verá en lo que sigue, ella no la aprovechó.

Tercera participación de Jeymi: la duda como obstáculo para el aprendizaje

Cuando el tutor preguntó a Jeymi por la causa de su duda ella contestó:

Tabla 6: Análisis de la tercera participación utilizando el Modelo de Toulmin

Como Paty tiene las literales al revés no estaba segura si yo estaba bien je	**Argumento 10:** D10: Paty tiene las literales al revés A10: No estaba segura si estaba bien W10: Si Paty tiene una respuesta diferente no estoy segura de mi respuesta B10: Razones extra-matemáticas (en particular, autoridad entre pares)

En A10 Jeimy recrudeció la duda que ella experimentó en torno al sistema de ecuaciones que planteó en A9, y en torno a su propia comprensión, a partir de que su compañera dio una respuesta distinta (D10) y a partir de la autoridad que Jeimy le concedió (C1, v. W10 y B10). Este conjunto de condiciones –su duda y los esquemas extra-matemáticos que activó, v. B10- parece haberle impedido a Jeimy ubicar la causa de su duda en su propia incomprensión y de investigar la manera de disolverla a través de criterios matemáticos, como la verificación de las dos resoluciones propuestas. Así entonces, la duda, entre otras cosas, actuó como un obstáculo para la práctica matemática. En lo que sigue se observa cómo Jeimy optó por recuperar su certeza a través de una salida negociada de carácter extra-matemático, a pesar de que es claro que ella posee conocimientos matemáticos suficientes para encarar exitosa y disciplinarmente los obstáculos que se le presentan.

Cuarta participación de Jeymi: la certeza como obstáculo para el aprendizaje

Tabla 7: Análisis de la cuarta participación utilizando el Modelo de Toulmin

Los dos sistemas resuelven el problema y lo sabemos al realizarlos y comprobarlos.	**Argumento 11** D11: Lo sabemos al realizarlos y comprobarlos → A11: Los dos sistemas son correctos (incorrecto) W11: Si realizamos y comprobamos los dos sistemas son correctos (incorrecto e implícito) B11: Razones extra-matemáticas (en particular, evitar estado de duda)

Es plausible suponer que era seguridad y certidumbre lo que en la cuarta participación Jeimy buscaba a toda costa. Para conseguirlas, propuso con firmeza y confianza (mediante el recurso de enfatizadores como 'sabemos' o 'resuelven') una solución negociada del conflicto, conforme a la cual las dos respuestas, la suya y la de Paty, eran correctas. Pero para esta salida Jeimy no sólo no aportó evidencias (dejando de considerar la solución de esos sistemas, D11), sino que las evitó, sesgando así su exploración (C3), evadiendo con ello consecuencias inesperadas. La necesidad de rescatar la certeza perdida, que la llevó a concluir A11, parece haberla llevado a privilegiar sus motivos –su seguridad y certidumbre- sobre los criterios matemáticos (C1). La urgencia de certeza, en este caso y de nueva cuenta, parece haber obstaculizado la comprensión matemática.

Conclusiones

En el documento se aportan evidencias empíricas de la presencia en la educación matemática, específicamente en la educación virtual, de un fenómeno que no sólo se da en el universo del profesional de las matemáticas sino que parece ser de envergadura universal: el que los estados epistémicos, es decir, las certezas y las dudas (correctas o incorrectas), pueden actuar como un impulso en la construcción de comprensiones pero también como un freno. Este hecho puede sorprender porque lo que dicta el sentido común es que las certezas en afirmaciones erróneas sólo representan un obstáculo para el aprendizaje o que las certezas en afirmaciones correctas sólo representan un impulso, o bien, que la duda y la contradicción es condición necesaria y suficiente para el aprendizaje –haciendo una lectura mecánica del Menón y de Piaget-. En este documento se muestra la función dual que esos estados epistémicos pueden jugar en relación con el conocimiento. Sería del todo deseable que los investigadores profundizaran en la explicación de este fenómeno, tan poco reportado en la literatura, y que los profesores lo consideraran en sus prácticas didácticas.

Referencias

Abelson, R. P. (1988). Conviction. *American Psychologist*, 43(4), 267.

Alarcón, J., Rigo, M., & Waldegg, G. (1994). La ciencia analítica en la primera mitad del siglo XIX: el teorema del valor intermedio. *Mathesis*. *X*(1), 47-92.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-18). California: Sage.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification*. Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3-21.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–270). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Martínez, V. & Pedemonte, B. (2014).Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics*, 86, 125-149.

Martínez, B. & Rigo, M. (2014[a]).Mathematical certainties in history and distance education.EnLiljedahl, P., Oesterle, S., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*,Vol. 4(pp. 177-184). Vancouver, Canada: PME.

Martínez, B. & Rigo, M. (2014[b]). ¿Certeza implica comprensión? En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII*. Pp. 445-454.Salamanca, España: SEIEM.

Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas*. *Problema central del desarrollo.* Madrid: Siglo XXI de España Editores, S. A.

Platón (versión 1981). Menón, o de la Virtud. En F. Samaranch (Trad.*), Platón, Obras Completas*. Madrid: aguilar.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, 84(1), 71-91.

Toulmin, S. E. (1958). *The use of arguments*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*. México: Editorial Trillas.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de Práctica. Aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona: Ediciones Paidós América, S. A.