LA CULTURA DE RACIONALIDAD EN LA ESCUELA SECUNDARIA. UN ACERCAMIENTO ETNOGRÁFICO

Rodríguez Rubio Sergio G. Rigo Lemini Mirela

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N. (Cinvestav-IPN)

rrsergg@yahoo.com.mx *mrigolemini@gmail.com*

En este informe de investigación se introduce la noción de 'Cultura de Racionalidad' (CQ) para indagar —con base en el modelo de Toulmin, desde un enfoque etnográfico y con un estudio de caso—, si en un salón ordinario de clases de matemáticas de educación secundaria existen estándares de sustentación de las afirmaciones disciplinares. En la clase observada se descubre una CQ (e.g., regularidades en el tipo de sustentos y argumentos, y en las trayectorias de participación) que permite prever futuras acciones del profesor involucrado.

Palabras claves: cultura de racionalidad, argumentos, etnografía, educación secundaria

Introducción

En la clase de matemáticas los maestros –deliberada o involuntariamente– comparten, (negocian o imponen) a los alumnos creencias, prácticas sistemáticas, normas de acción e interacción y actitudes en general (Franke, Kazemi y Battey, 2007, pp. 237-239); específicamente, por tanto, comparten (negocian o imponen) también las que se relacionan con lo que el grupo considera (consciente o inconscientemente) como lo 'razonable' (Balacheff, 2000). Esto incluye, entre otras cosas, los criterios y tipos de sustentación que el colectivo acepta para justificar las verdades matemáticas (o en otros términos, las normas sociomatemáticas correspondientes a lo que ahí se asume como una explicación aceptable); o bien, las reglas relativas al reparto de obligaciones en relación a quién le toca argumentar y a quién valorar y sancionar los argumentos de los otros, entre otras cosas. En la clase de matemáticas, en suma, los maestros –en conjunción con sus alumnos– promueven una subcultura que descansa en los distintos aspectos y procesos concernientes a la sustentación y justificación. En el marco de la presente investigación, a esta subcultura se le ha denominado "Cultura de racionalidad"

Antecedentes y planteamiento del problema

Un rasgo prototípico de las matemáticas es su racionalidad, si por esto se entiende el conjunto de normas de justificación con base en las cuales habitualmente una determinada comunidad de matemáticos justifica las afirmaciones matemáticas. En esta investigación interesa estudiar un fenómeno educativo, el de si existe una racionalidad en el aula de matemáticas —como sucede en la matemática disciplinar—. Específicamente, se plantea examinar si en un salón ordinario de clases de matemáticas existen estándares de sustentación de las afirmaciones disciplinares que concurran ahí de manera sistemática y consistente (y no sólo puntual o azarosamente).

Con objeto de recabar evidencias empíricas, se lleva a cabo un estudio exploratorio de caso (Stake, 1999); para el análisis se asume un enfoque etnográfico (Bertely, 2000), mediante el cual se trata de determinar la posible racionalidad de la clase estudiada a través de la observación empírica directa y de la recuperación de las voces, acciones y significados de los actores; asimismo, se adopta un enfoque etnológico (Bertely, 2000) —acudiendo a un estudio de corte más longitudinal— conforme al cual se buscan identificar hábitos y patrones relacionados con la racionalidad. Consistentes con esta perspectiva cultural, aquí se concibe la racionalidad como una subcultura (que forma parte de la cultura escolar), la que en esta investigación se denomina 'Cultura de racionalidad'; este constructo forma parte del marco interpretativo con base en el cual, en el último apartado de este escrito, se identifican, describen e interpretan (Denzin & Lincoln, 1994) los posibles componentes que determinan y dan forma a la racionalidad de la clase de matemáticas analizada. Para el análisis de los sustentos, que en la clase toman forma de argumentos, se utiliza el modelo de Toulmin (1974).

Investigaciones sobre la racionalidad en educación matemática, que parten del modelo de Habermas basado en la racionalidad epistémica, teleológica y comunicativa, abundan; entre otros están los de Boero y Planas (2014) y el de Morselli y Boero (2009). Los trabajos en los que se recurre a Toulmin también son varios, por ejemplo el de Krummheuer (1995), el de Yackel (2002) o el de Martinez y Pedemonte (2014).

Marco interpretativo

Los Esquemas Epistémicos. Su definición

Los mecanismos a los que una persona o una comunidad recurre habitualmente para sustentar los hechos de las matemáticas Rigo (2013) los denomina 'esquemas epistémicos'. En ese trabajo ella identifica esquemas epistémicos de tipo matemático (e.g., las instanciaciones de reglas) así como esquemas epistémicos basados en consideraciones extra-matemáticas, como el esquema operatorio, mediante el cual se otorga validez a una regla acudiendo a la autoridad de las matemáticas.

Interpretación funcional de los argumentos. El modelo de Toulmin

De acuerdo con el modelo de Toulmin (1974), un argumento está conformado por tres elementos: Claim (C, conclusión cuyos méritos se están tratando de establecer), Data (D, hechos a los que se apela para darle fundamento a la afirmación) y Warrant (W, mediante los cuales se da cuenta de las reglas, principios o licencias de inferencia que autorizan pasar de una evidencia a una afirmación). Está además el Backing (B, el cual soporta la garantía ofreciendo su cimiento teórico, práctico o experimental).

La Cultura de Racionalidad. Una caracterización

Los componentes de la Cultura de Racionalidad son, entre otros, los siguientes:

CR.i. *Normas de sustentación*. El bagaje de argumentos que una comunidad habitualmente activa para sustentar afirmaciones o hechos de las matemáticas. Se trata de las prácticas recurrentes y más aceptadas de argumentación o sustentación que se dan en una comunidad. Los argumentos están integrados por los esquemas epistémicos (tanto matemáticos como extra-matemáticos) que aparecen explícitamente en las evidencias (D).

CR.ii. *Trayectorias de participación y reparto de responsabilidades*. Se refiere a quién da los C o los D y a quién le corresponde sancionar esas participaciones. Las trayectorias de participación están integradas por una sucesión de intervenciones de los actores de clase en los procesos de argumentación.

Técnicas e instrumentos de investigación empírica

La investigación que aquí se reporta es de tipo interpretativo (Denzin & Lincoln, 1994) y etnográfico (Bertely, 2000) y está basada en un estudio de caso (Stake, 1999). Para determinar el caso, se hicieron observaciones sin intervención, a tres profesores de una escuela que cuenta con prestigio académico en la zona. Se eligió a la Maestra Noemí, con dos años de servicio, porque era la que presentaba mayor tendencia hacia la justificación matemática; cuando fue observada, ella impartía la clase de matemáticas a un grupo de primer grado de secundaria integrado por 42 alumnos. En un primer momento se le observó durante 5 sesiones; en uno segundo, se observaron 6 sesiones (que se analizan en este documento) y en un tercer momento se le volvió a observar durante otras 5 sesiones. Las clases fueron videograbadas y transcritas.

La Cultura de Racionalidad de una clase ordinaria de matemáticas. Estudio empírico

Para el análisis que aquí se expone se examinó una secuencia didáctica que versa sobre reparto proporcional. La secuencia didáctica, impartida en seis módulos de 50 minutos cada uno, se fragmentó en episodios, en cada uno de los cuales se propusieron uno o varios argumentos para dar sustento a una afirmación. Para este reporte se analizaron 33 episodios y 68 argumentos.

Primer nivel de reconstrucción. Análisis de un caso

En el aula de matemáticas, lo que significa argumentar o sustentar las afirmaciones matemáticas, esto es, lo que significa participar en las prácticas de racionalidad (y de educarse en esa racionalidad y de aprender a partir de ella), se crea y recrea en las actividades escolares diarias (Cf. Bertely, 2000; Stake, 1999). Es por ello que, en lo que sigue, se expone el análisis de un fragmento de clase impartido por la maestra que participó en el estudio, el cual revela y puntualiza lo que frecuentemente sucede en la vida cotidiana de su aula. Se trata de un referente empírico integrado por tres argumentos que forman parte de un mismo episodio, el cual ilustra bien las formas de sustentación habituales en la clase observada. La transcripción de clase de los argumentos aparece en la primera columna de la Tabla 1, y su interpretación funcional, con base en el modelo de Toulmin (1974), se incluye en la segunda.

Tabla 1. Registro del primer fragmento y análisis de los argumentos con el modelo de Toulmin

<table>
<tr>
<td>43</td><td>P:</td><td>Si se requieren preparar 12 litros de agua de limón, ¿cuántos limones y cuántas cucharadas de azúcar necesitamos?</td>
<td rowspan="3">Argumento 1
D1: Instanciación de una regla intuitiva (PIM) → C1: Para 12 litros de agua de limón se necesitan 48 limones y 24 cucharadas de azúcar

W1: Propiedades de una regla PIM

B1: Matemático. Reglas de la proporcionalidad (conocimiento básico)</td>
</tr>
<tr><td>58</td><td>E:</td><td>Son 48 limones y 24 de azúcar.</td></tr>
<tr><td>60</td><td>E:</td><td>Porque se van a duplicar.</td></tr>
<tr>
<td>76</td><td>P:</td><td>Duplicas, ¿por qué? Antes tenías 6, ahora te están pidiendo 12, se está duplicando, ¿cierto? Multiplicamos por 2: 6 por 2, 12; 24 por 2 …
<table>
<tr><td>Litros de agua de limón</td><td>Número de limones</td><td>Cucharadas de azúcar</td></tr>
<tr><td>3</td><td>12</td><td>6</td></tr>
<tr><td>6</td><td>24</td><td>12</td></tr>
<tr><td>12</td><td>48</td><td>24</td></tr>
</table>
(Tabla que la maestra elabora en el pizarrón)</td>
<td rowspan="2">Argumento 2
D2: Definición de la proporcionalidad a partir del análisis de un caso → C2 = C1

W2: Justificación explícita de la definición de proporcionalidad basada en propiedades de la PIM y en los isomorfismos

B2: Matemático. Reglas de la Proporcionalidad (conocimiento medio)</td>
</tr>
<tr><td>83</td><td>P:</td><td>Si vemos que se está duplicando [la cantidad de litros de agua] nos damos cuenta que tenemos que duplicar también la cantidad de limones y la cantidad de cucharadas de azúcar. Si se triplicara, por ejemplo, si tenemos el dato de tres y nos piden 9 ¿están de acuerdo</td></tr>
</table>

		que se triplica?, ¿tres por tres? Nueve, ¿sí o no?, ¿por cuánto se tendría que multiplicar el 12?	
85	P:	Atención, vean la tabla, al principio nos dieron 3 litros de agua para 12 limones y 6 cucharadas de azúcar. Si aumenta la cantidad de litros de agua, qué pasa con los limones ¿aumentan o disminuyen?	
86	E:	Aumentaron.	
87	P:	Aumentaron también, cierto. Si aumenta la cantidad de litros de agua, ¿qué pasa con las cucharadas de azúcar?	
89	P:	Aumentaron, ajá. Si la cantidad de litros disminuyera, ¿qué pasaría con los limones?	
90	E:	Disminuyen.	
91	P:	Disminuyen, ¿y con las cucharadas de azúcar?	
92	E:	Disminuyen.	
93	P:	A esa relación se le llama relación de proporcionalidad, si aumenta una y aumenta la otra ya la hicimos, aumentan parejo, ¿sí o no? Si a una la multiplico por 2, la otra también la multiplico por 2. Si disminuyen, disminuyen parejo, ¿de acuerdo?	
134	P:	Pues yo nada más multiplico esto por esto y lo divido entre esto [12 por 24 entre 6] Litros de agua de limón → Número de limones 6 → 24 12 → 48 Litros de agua de limón → Cucharadas de azúcar 6 → 12 12 → 24	Argumento 3 D3: Instanciación de una regla escolar R3 → C3 = C1 W3: Confianza en fórmulas de las matemáticas B3: Extra-matemático, conocimiento operatorio

En el primero de los argumentos que aparecen en la Tabla 1, un alumno suministró como evidencia (D1) la instanciación de una regla intuitiva (la Propiedad Isomórfica de la multiplicación, PIM, por sus siglas. Vergnaud, 1989), cuya aplicación la soportó en las propiedades de dicha regla (v. W1), lo que a su vez sustentó en un respaldo matemático y en una noción básica de la proporcionalidad (en B1). En el segundo argumento, trasmitido por la profesora, se tiene una evidencia (D2) de un nivel distinto a la evidencia (D1) que facilitó el alumno en el argumento precedente. La maestra aprovechó la intervención del estudiante para llevar a cabo un análisis de casos que le permitió introducir y justificar (mediante un esquema semi-inductivo en D2.iv) el concepto de proporcionalidad. Para ello, se basó en tres consideraciones relacionadas con dicha noción de proporcionalidad: que si se duplican o triplican las cantidades de un espacio de medida, se debe hacer lo propio en los otros espacios de medida (PIM para casos básicos, en 83); que las cantidades de los espacios de medida o bien aumentan, o bien, disminuyen (propiedad de los isomorfismos que aunque no define a la proporcionalidad, en la educación básica se suele tomar como su distintivo esencial, en 85-92); y que dicha variación se da entre los espacios en forma "pareja", haciendo quizás referencia a la aplicación de la PIM a cualquier escalar (93). La conexión entre la evidencia y la afirmación se sostuvo en W2, constituido por un esquema epistémico, el de la justificación de la PIM, que se soportó a su vez en un respaldo matemático (B2), específicamente, en propiedades de la proporcionalidad que implican un conocimiento medio. El tercer argumento lo proveyó un alumno, quien brindó como evidencia (D3) la instanciación de una regla escolar, la regla de tres; la garantía del argumento (W3) fue la confianza que el niño pareció tener en las fórmulas matemáticas y el respaldo (B3) en un esquema operatorio extra-matemático (se confía en el uso de una regla o fórmula por la autoridad de las matemáticas). En la Tabla 2 aparece una síntesis del fragmento de clase recién expuesto.

Tabla 2. Síntesis del episodio analizado. (C: Claim, NA: Nombre del argumento: P: Profesora, y E: Estudiante

<table>
<tr><th>C</th><th colspan="2">D (Data)</th><th>W (Warrant)</th><th>B (Backing)</th><th>NA</th></tr>
<tr><td rowspan="3">2 (E)</td><td>E</td><td>Instanciación de una regla intuitiva PIM</td><td>Propiedades de una regla PIM</td><td>Reglas de la proporcionalidad (conocimiento básico)</td><td>IRI-M</td></tr>
<tr><td>P</td><td>Definición de la proporcionalidad a partir del análisis de un caso</td><td>Justificación explícita de la definición de proporcionalidad basada en propiedades de la PIM y en los isomorfismos</td><td>Reglas de la proporcionalidad (conocimiento medio)</td><td>V-M</td></tr>
<tr><td>E</td><td>Instanciación de una regla escolar R3</td><td>Confianza en fórmulas de las mat.</td><td>Esquema operatorio</td><td>IRE-EM</td></tr>
</table>

Características sobresalientes de las prácticas de racionalidad de la clase de Noemí son entonces: La trayectoria de participaciones (primero un alumno, quien sugirió la afirmación y la primera evidencia; a continuación la maestra, quien con su argumento profundizó y enriqueció la producción del alumno; después otro alumno, quien aportó una evidencia distinta); la calidad de las participaciones (instanciación de reglas, en el caso de los niños; explicación conceptual de las reglas o de su uso, o justificación de la proporcionalidad, por parte de la maestra); y el tipo de argumentos (en su mayoría, aunque no todos, respaldados en consideraciones matemáticas). El episodio bajo examen permite esclarecer también cómo la maestra va negociando sus prácticas de racionalidad —objetivo en el que, a través de intercambios dialógicos, involucra a los alumnos mediante preguntas constantes, no sólo del qué y del cómo sino del por qué— y cómo va enculturando en esa racionalidad a sus estudiantes.

Los rasgos de las prácticas de racionalidad que en este apartado se han destacado, en lo que sigue se sustanciarán también con otro nivel de análisis, de tipo numérico. Con ese examen se intenta mostrar que los rasgos aquí descritos son una expresión concreta de los patrones de sustentación que delinean y conforman la Cultura de Racionalidad de la clase observada.

Segundo nivel de reconstrucción. Identificación de Patrones

Los argumentos recurrentemente formulados en las clases de la maestra Noemí se describen en la Tabla 3. Ahí también aparece el tipo de Backing en el que se soporta el argumento (matemático o extra-matemático), la frecuencia con la que se dio en clase, y el actor que lo formuló. La incidencia, relativamente alta, de estos argumentos en la clase observada permite sugerir que se trata de algunas de las normas de sustentación (CR.i) que dan forma y actualizan la Cultura de Racionalidad de dicha clase.

Tabla 3. Argumentos recurrentes en la clase observada

Argumento	Descripción del Argumento	Backing	Profesora	Alumnos
IRI	Instanciación de una regla intuitiva (PIM o valor unitario)	Matemático	3	20
IRE	Instanciación de una regla escolar (regla de tres)	Matemático Extra-matemático	1 3	0 3
EPR	Explicitación del proceso de una regla. Se explica el proceso que se tiene que seguir para la aplicación de una regla. En este caso hay una reflexión en el proceso que puede aplicarse a otros casos.	Matemático Extra-matemático	12 5	5 0
V	Viabilidad o justificación de una regla	Matemático	4	1

	o un proceso			
RAI	Repetición para dar aval institucional	Matemático Extra-matemático	3 1	0 0
R	Consideraciones empíricamente razonables	Matemático Extra-matemático	2 2	0 0
CRI	Comprobación de regla intuitiva	Matemático	3	0

Otra posible norma que conforma la Cultura de Racionalidad de la clase observada (CR.i, y que se desprende también del análisis de las cantidades que destacan en la Tabla 3) hace referencia a la división equilibrada del número de argumentos que dieron los alumnos y los que dio la maestra: mientras casi el 45% fueron proporcionados por ellos, los restantes (55%) los ofreció su mentora. Es interesante que del total de los argumentos dados por los alumnos, en el 80% se involucró la instanciación de una regla.

Pero sin duda alguna, uno de los rasgos más sobresalientes de las normas de sustentación (CR.i) de la Cultura de Racionalidad que impera en el salón de clase de Noemí es la tendencia que ahí se observa hacia la sustentación con base en consideraciones matemáticas: de los 39 argumentos que estuvieron a cargo de la maestra, en 28 de ellos el respaldo fue matemático (cerca del 72%); de los 29 argumentos donde participaron los alumnos, 26 se sustentaron matemáticamente (cerca del 90%), y de los 68 argumentos totales, 54 de ellos (cerca del 80%) fueron soportados en aspectos de la disciplina. Sobresale también el que casi el 8% de los argumentos son de tipo conceptual (V).

Las trayectorias de participación predominantes o destacables en la clase de la maestra Noemí aparecen en la Tabla 4 (CR.ii). La primera columna denota el primer argumento que en clase se dio para sustentar un enunciado matemático y en la segunda, el argumento que le siguió con base en el cual se justificó ese mismo enunciado.

Tabla 4. Trayectorias de participación

Alumno	Profesora	Totales
IRI-M	IRI-M	1
	EPR-M	2
	EPR-M	2
	V-M	2
	RAI-M	3
	CRI-M	1
IRE-EM	EPR-EM + R-EM	1
	EPR-EM	1
	RAI-EM	1
EPR-M	EPR-M + R-M	1
	EPR-M	3
EPR-EM	EPR-M	1
Alumno	**Alumno**	**Totales**
IRI-M	V-M	1
Profesora	**Profesora**	**Totales**
IRI-M	R-EM	1
EPR-EM	V-M	1
IRE-EM	CRI-M	1
EPR-M	CRI-M	1

En esa Tabla 4 es posible detectar algunas regularidades que, al igual que en los casos precedentes, muy posiblemente definen una de las pautas de la Cultura de Racionalidad de la clase de Noemí (en CR.ii): casi en el 56% de los argumentos (38) que se formularon en la secuencia didáctica, los alumnos proporcionaron la primera evidencia, con la intención de dar a conocer el tipo de estrategia que usaron para soportar su afirmación; en estos casos, se sucedió la participación de la maestra, quien, como ya se ha dicho, profundizó con argumentos complementarios, con el propósito de avalar la participación del niño, aunque sea de manera no directa, así como de hacer explícitas y explicar las relaciones y conceptos implicados en las reglas utilizadas por el alumno (para lo cual recurrió a la EPR, entre otros).

Consideraciones finales

Con el análisis etnográfico aquí expuesto, basado en la noción de Cultura de Racionalidad, interesa des-velar la racionalidad que –desde la mirada necesariamente interpretativa de los investigadores– domina en un aula ordinaria de matemáticas, intentando distinguir entre lo que ahí ocurre de lo que resulta deseable. Sin duda alguna lo ideal es que en el aula se eduque a los alumnos en la Cultura de Racionalidad que establece la matemática escolar definida en el currículum, y que en la medida en que se avanza en la escolaridad lo ideal también es que dicha racionalidad se incline más hacia la propia de la matemática disciplinar. Sin embargo, para conseguir estos objetivos por lo pronto resulta imprescindible, entre otras cosas, que el profesor y aquellos que lo forman se acerquen al aula con una mirada abierta para descubrir y tomar conciencia de la racionalidad que realmente ahí domina y conforme a la cual se encultura (Morselli y Boero, 2009) cotidianamente a los alumnos.

No deja de sorprender lo bien articulada que está la práctica de la maestra Noemí, y no deja de sorprender tampoco la presencia clara y reconocible de una estructura de racionalidad en su clase, con normas de sustentación sistemáticas y claras, y trayectorias de participación consistentes con dichas normas. Esto ofrece la coyuntura de pasar del terreno puramente descriptivo al de la predicción, porque aunque la cultura no es determinista, las regularidades en la práctica del docente —integradas y organizadas en la Cultura de Racionalidad como un constructo interpretativo— brindan la posibilidad fundada de prever acciones y decisiones del mentor dentro de un rango razonable de opciones. Así, la Cultura de Racionalidad y los instrumentos teórico-metodológicos aquí sugeridos y aplicados se pueden convertir en útiles herramientas que los profesores y sus formadores pueden aprovechar para conseguir los objetivos planteados al final del párrafo precedente. Esto se considera es la aportación más importante del presente trabajo.

Referencias

Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas [Proof processes among mathematics students]. Bogotá: una empresa docente, Universidad de los Andes.

Bertely, M. (2000). *Conociendo nuestras escuelas*. México D. F.: Paidós.

Boero, P., & Planas, N. (2014). Habermas' construct of rational behaviour in mathematics education: New advances and research questions. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (Eds.), *Proc. of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA, 36* (Vol. 1, pp. 205-235). Vancouver, Canada: PME.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-18). California: Sage Publications.

Franke, M. L., Kazemin, E., y Battey, D. (2007). Mathematics Teaching and classroom practice. En F. Lester (Ed.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp 225-256). Charlotte, NC: NCTM

Krummheuer G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Martinez, M. V., & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 125–149.

Morselli, F., & Boero, P. (2009). Proving as a rational behaviour: Habermas' construct of rationality as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof. In V. Durand, S. Soury y F. Arzaello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6)*, pp. 211-220, Lyon (France).

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics 84*(1), 71-91.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

Toulmin, S. E. (1974). *The Uses of Argument*. New York: Cambridge University Press.

Vergnaud, G. (1989). *Multiplicative structures*. In J. Hiebert & Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (Vol. 2, pp. 141-161). Reston: NCTM.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation? *Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 423–440.