

# LAS METÁFORAS Y LAS REDES METAFÓRICAS ASOCIADAS A LA IDEA DE VECTOR EN FÍSICA Y ECONOMÍA

Elizabeth Hernández Arredondo, Claudia Margarita Acuña Soto

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México

[eli\\_visual@hotmail.com](mailto:eli_visual@hotmail.com), [claudiamargarita\\_as@hotmail.com](mailto:claudiamargarita_as@hotmail.com)

*Este trabajo de investigación explora el papel del pensamiento metafórico cuando los estudiantes del nivel superior usan los vectores para interpretar distintos contenidos escolares. Y es la interpretación de problemas de movimiento entre estudiantes de ingeniería en la materia de Física lo que nos acercó al uso de metáforas básicas y secundarias que estaban asociadas al manejo de algunos de los signos involucrados. Luego del examen pre doctoral se dirigió la investigación a explorar la persistencia de las metáforas en el tratamiento de los vectores y sus espacios en contextos de economía, pero sin tener presente la representación de éstos como flechas, por lo que decidimos trabajar con una población de estudiantes de economía donde hemos observado hasta el momento que continúa apareciendo el uso de metáforas, las que pueden ser organizadas en redes metafóricas.*

Palabras claves: metáforas, signos, redes metafóricas, vector y espacios vectoriales.

## Introducción

Este trabajo se encuentra en la fase final del doctorado y es un reporte de lo encontrado en las dos partes diferentes de la investigación, en la primera parte de éste, se observaron los recursos semióticos y discursivos de estudiantes de ingeniería en computación cuando daban sentido a problemas de movimiento uniformemente acelerado, apoyados en la idea del vector como flecha, que es la manera escolar de introducirlos y lo que de acuerdo a Nguyen y Meltzer (2003) resulta un primer conflicto, pues esta representación no siempre es la más adecuada para dar interpretaciones propias de los fenómenos físicos.

Esta experiencia nos permitió ver que los estudiantes usaban una metáfora básica inspirada por la imagen dinámica del vector asociada a la idea del flujo subyacente de la flecha, lo que nos hizo preguntarnos, qué pasaría si el vector como flecha no se presentara como un recurso semiótico, qué pasaría con las metáforas, aparecerían y serían las mismas, como sería el uso semiótico de los signos.

Por lo que en la segunda etapa —que se encuentra en fase preliminar— se trabajó con estudiantes de economía que interpretan también problemas que tienen que ver con el uso de vectores y espacios vectoriales, pero donde la representación del vector es diferente y el contexto no hace alusión al movimiento físico, para finalmente presentar

una contrastación con el grupo de física, por lo que se mantuvo un análisis sobre la relación entre el uso de metáforas y los signos involucrados en ellas.

El aprendizaje de los vectores es fundamental para la modelación, en cursos como física, cálculo vectorial, álgebra lineal, entre otros, de acuerdo con Arenzana (1997). En el ambiente escolar, se utilizan una variedad de representaciones matemáticas del vector, este uso hace necesario que los estudiantes aprendan su tratamiento y aplicación.

El siguiente reporte de investigación está situado en el terreno de la interpretación del uso de los vectores que hacen los estudiantes usuarios, donde se analiza el papel de las metáforas y de los signos empleados por ellos para dar sentido a diferentes contenidos escolares; tres son las preguntas que dirigen el documento; ¿Cuáles son las metáforas que usan los estudiantes para dar sentido a los vectores en la interpretación de los problemas? ¿Cuál es la relación entre el uso que se hace de los signos y las metáforas? ¿Cómo se relacionan las redes metafóricas usadas por los estudiantes? Enseguida se expondrá los referentes teóricos que dan sustento a nuestra propuesta.

## **Marco Referencial**

La postura teórica de la Cognición Personificada desarrollada por Lakoff y Núñez (2010) considera que existe una relación muy cercana entre la cognición, la mente y la experiencia física, el medio por el que se proyecta esta relación es la metáfora y es una forma por la que emergen los objetos en construcción. En particular, en este trabajo consideraremos el uso de las metáforas empleadas por los estudiantes como la base de las interpretaciones que tienen por objeto dar sentido a la solución de los problemas, que involucran vectores y espacios vectoriales.

La estructura fundamental de una metáfora requiere que se comprenda un objeto o dominio en términos de otro dominio, Lakoff y Johnson (1991), y Lakoff y Núñez (2000), Bolite, Acevedo y Font (2005). Estos autores suelen distinguir dos tipos de metáforas conceptuales en el pensamiento: 1) Grounding: el dominio de partida está fuera de las matemáticas mientras el de llegada está dentro de ellas y 2) Linking: El dominio de partida y llegada de ésta están dentro de las matemáticas. El proceso cognitivo que vincula una idea con su representación, será estudiado a partir de los *esquemas imagen* usados por los estudiantes, así como el tipo de metáforas involucradas en la interpretación de los procesos, que implican la solución de problemas asociados a los vectores y sus espacios vectoriales.

El vector como representación matemática nos permite considerar dos aspectos básicos del pensamiento metafórico, por un lado se trata de un objeto matemático bien definido y por otro cuenta con diversas representaciones (la flecha, componentes, expresión canónica,  $n$ -ada, entre otras). Desde este punto de vista los *esquemas imagen*

puestos en funcionamiento relacionan nuestras sensaciones corporales de carácter dinámico con las estructuras matemáticas correspondientes, como sugieren Lakoff y Johnson (1991) en el caso del vector.

La observación de las metáforas durante la primera etapa de esta investigación mostró, la existencia de otro conjunto de metáforas secundarias que luego toman caminos distintos, lo que hizo que incluyéramos una postura que ya avizoraba Lakoff y Núñez (2000) sobre la llamada Teoría de redes metafóricas, bajo esta idea se considera que las metáforas se comportan como una red de estructuras que puede dar sustento a la formación de ideas matemáticas y que para nuestros objetivos permite entender la estructura del pensamiento usado por los estudiantes en la resolución de los problemas propuestos tanto de aquellos de física, observación que estamos llevando a cabo con los estudiantes de economía, debido a que consideramos que el reconocimiento de esta red apoyará a entender la forma cómo se lleva a cabo la comprensión del vector como símbolo asociado a ciertos significados, como sugiere Mowart y Davis (2010).

El conocimiento de la *topología* de esta red permitiría, en principio, entender el sistema de metáforas y conceptos como un todo (Barabási, 2003). Los elementos que dan sustento a la red metafórica se llaman nodos y son las unidades básicas del proceso, lo que para Lakoff y Núñez (2000) son los dominios de llegada, mientras que para Mowart y Davis son dominios conceptuales los que están interconectados y forman un complejo de experiencias sensoriales, lenguaje y conceptos relacionados.

Para entender los signos asociados al uso del vector en la interpretación de los estudiantes nos basaremos en las consideraciones de Pierce (The Collected Papers, 1931-1958) respecto a los distintos tipos de signos y la relación con su uso y lo observamos en el trascurso de la resolución colaborativa de los problemas planteados.

Consideramos como Radford (2001) que: el uso de los signos, como mediadores culturales, puede ser la base para la construcción de los significados matemáticos, además, es precisamente su uso funcional lo que permite un cambio desde las llamadas concepciones idiosincráticas hasta los conceptos, según Berger (2005) esto permite no sólo considerar las propiedades matemáticas asociadas a las definiciones, sino que influye también a los procedimientos cognitivos vinculados a ellas. Enseguida se describe la metodología empleada para el estudio.

## **Metodología**

El tratamiento metodológico de este trabajo está fundamentado en la corriente descriptiva-interpretativa y corresponde a un estudio de casos; de acuerdo con Cohen, Manion y Morrison (2007), de tipo no participante.

También se quiere dejar presente que esta investigación es de tipo cualitativo por lo que la fiabilidad cuantitativa es trasladada al ámbito cualitativo con la idea de rigor

en la investigación de acuerdo a Hernández, Fernández, Baptista (2014), pero antes mencionaremos que las respuestas de cada una de las poblaciones no presentan una diferencia significativa entre ellas para un nivel de significación alto ( $\alpha = 0.05$ ), por lo que en seguida se expone de manera sucinta la metodología de la investigación.

*Participantes 1ra etapa:*

Se trabajó con veinte estudiantes universitarios con una edad promedio de 19 años, en nueve sesiones semanales de dos horas en la materia de Física, con el apoyo del docente titular y del investigador, en el segundo semestre de la carrera de Ingeniería en Computación en la Universidad Autónoma del Estado de México-Campus Valle de Chalco, haciendo uso del lápiz y papel y la computadora para interpretar y resolver problemas de movimiento.

*Participantes 2da etapa:*

Los sujetos de investigación fueron 147 estudiantes de primer semestre en la carrera de Economía, con edades entre 18 y 19 años, quienes toman sus clases de matemáticas en diferentes idiomas en la Universidad de Valencia, España, todos ellos recibieron instrucción sobre vectores y sus operaciones sobre espacios vectoriales, para las actividades hicieron uso de lápiz y papel para interpretar y resolver problemas de economía en donde los vectores no eran representados mediante flechas.

*Instrumentos 1ra etapa:*

Se trabajó con 6 actividades y una entrevista en tres momentos:

- 1) Actividades de introducción con apoyo del lápiz y papel y computadora.
- 2) Actividades parcialmente guiadas para modelar con computadora, problemas de movimiento para su interpretación y resolución.
- 3) Actividad de modelación libre. Consisten en la exploración un problema de movimiento relativo

*Instrumentos 2a etapa:*

Se trabajó con cuatro actividades:

- 1) Exploración en la operatividad con vectores.
- 2) Exploración del espacio generado en problemas contextualizados en economía.
- 3) Modelación y solución de un problema de economía
- 4) Exploración del vector de direcciones en economía

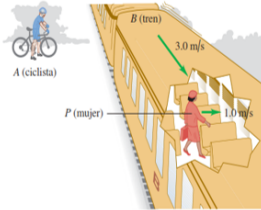
Enseguida se presenta un ejemplo del tipo de problemas a los que se enfrentaron en ambas etapas.

Imagen 1. Ejemplo del tipo de problemas tratados en el estudio

Problema: Si la velocidad del tren relativa al suelo tiene magnitud 3.0 m/s y la velocidad de la mujer relativa al vagón tiene magnitud 1.0 m/s, mientras que la mujer camina a lo ancho de un vagón de ferrocarril.

a) ¿El vector de velocidad relativo al suelo es?

b) Posición de la mujer relativa al marco de referencia del ciclista y al marco del tren.



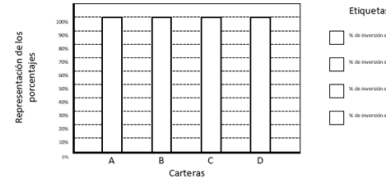
c) El cálculo del desplazamiento de la mujer.

Un banco gestiona 5 carteras A, B, C, D y E, cuyo capital se distribuye en cuatro compañías P1, P2, P3 y P4 en la proporción que se indica en la tabla siguiente:

Compañías	Carteras				
	A	B	C	D	E
P1	0.2	0.3	0.25	0.3	0
P2	0	0.5	0.25	0.3	0.2
P3	0.2	0.1	0.25	0.1	0.5
P4	0.6	0.1	0.25	0.3	0.3

El banco desea ampliar el capital de sus carteras. Expresa el conjunto de todas las posibilidades que tiene el banco sin que se creen excedentes de capital.

Con la tabla anterior elabora un gráfico de barras que represente los vectores de las carteras.



Explica la relación que existe entre las dos diferentes representaciones de un vector propuestas en los puntos 1 y 2.

### En Física

### En Economía

*La aplicación de los instrumentos en la primera etapa:*

Las actividades fueron incorporadas al trabajo áulico del curso de Física con los estudiantes, quienes podían hacer uso de la computadora, lápiz y papel, además de poder comparar y platicar sobre sus resultados, entre ellos y el docente titular.

*La aplicación de los instrumentos en la segunda etapa:*

Las actividades correspondieron al trabajo áulico del curso de Economía con los estudiantes, quienes podían hacer uso la calculadora, lápiz y papel, pero quienes por características logísticas del espacio de trabajo no tenían una movilidad que les permitiera comparar frecuentemente sus resultados.

En el siguiente apartado se presenta los resultados preliminares del estudio.

## Resultados

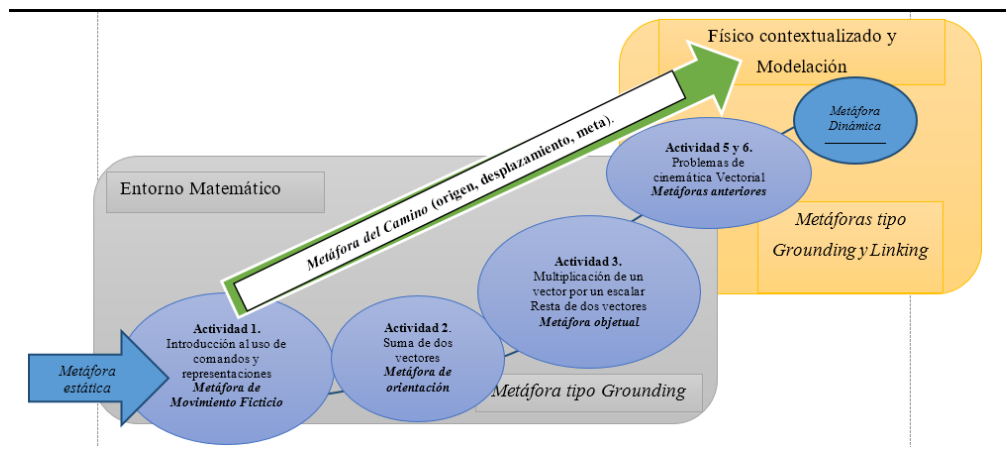
*Resultados de la 1ra parte del estudio:*

Los resultados sobre la construcción de las metáforas, sugieren el desarrollo de distintos tipos de metáforas. Se determina una *metáfora estática* debido a la definición; luego aparecieron otras que han sido reportadas en estudios de este corte como: *el movimiento ficticio, la de orientación y la objetual*; al finalizar el trabajo se obtuvo una *metáfora de tipo dinámico* para la interpretación de un problema de movimiento relativo, estas metáforas son consideradas secundarias por su esporádica aparición. Sin embargo, hay una metáfora que predomina durante toda la experimentación que es la llamada del *camino*,

por lo que la consideraremos una *metáfora básica* como señalan Jonhson (1987) y Font, Bolite y Acevedo (2010).

A continuación proponemos un diagrama en la imagen 4, que de manera conjunta presenta las actividades y el tipo de metáforas desarrolladas por los estudiantes a lo largo de la investigación pre doctoral.

Imagen 2. Esquema de las Metáforas que aparecieron en el trabajo de los estudiantes de ingeniería



La metáfora "del camino" es asociada al flujo y al movimiento, la cual se fortaleció con el uso del arrastre de la computadora.

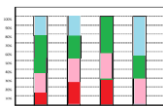
También encontramos que aunque el mismo tipo de metáforas secundarias —la de orientación, el movimiento ficticio, la objetual, entre otras— fue la base de las interpretaciones de nuestros estudiantes, la diferencia estuvo en el uso de los signos. Los estudiantes que logran interpretar y resolver los problemas correctamente, fueron aquellos que usaron diagramas y expresiones algebraicas, lograron organizar espacialmente la información del problema.

*Resultados preliminares de la 2da parte del estudio:*

En las actividades analizadas se puede observar de manera general la presencia de dos metáforas sin importar el idioma de cada estudiante; 1) la metáfora del camino y 2) la metáfora del contenedor

La metáfora del camino usada por los estudiantes tenía dos dominios de partida fuera y estaba dentro de las matemáticas. El cuadro 1 que se presenta a continuación representa el tipo de expresiones que usaron estos estudiantes en la metáfora del camino detectada en la segunda parte del estudio.

Cuadro 1. Relaciones entre la imagen-esquema del camino y los dominios de las metáforas

Imagen esquema	Dominio de Partida	Dominio de llegada
1. Trayectoria de los costos El desplazamiento del costo	1. Fuera de las matemáticas Camino	Incremento o decremento.
2. Desplazamiento las ordenadas y las abscisas Un punto con rumbo	2. Dentro de las matemáticas Coordenadas Direcciones	$\Delta x_i$
	Distancias, 	

Como puede observarse en el cuadro anterior la metáfora del camino que usan los economistas si bien hace a lución al desplazamiento, el contexto en el que se encuentra es totalmente diferente al de los estudiantes de Física, pues en economía este flujo es asociado a situaciones propias, como lo fue el incremento o decremento de precios.

La metáfora del contenedor empleada por los estudiantes de economía alude a propiedades que se infieren de la representación, como si se tratase directamente del vector, este esquema-imagen particular tiene que ver con los elementos y las propiedades que se relacionan entre unos a otros, esta metáfora se encuentra presente en los problemas abordados por los estudiantes durante la solución de la mayoría de los problemas planteados. El cuadro 2 muestra los elementos presentes en la metáfora del Contenedor y las formas de expresarlas por parte de los estudiantes.

Cuadro 2. Relaciones entre la imagen-esquema del y los dominios de la metáfora

Imagen esquema	Dominio de Partida	Dominio de llegada															
Dentro de las matemáticas																	
Elementos dentro del contenedor	Sistema de ecuaciones $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$ $a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$ $\vdots$ $a_{m1}x_1 + \dots + a_{nm}x_n = b_m$	Matriz aumentada $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$															
Datos contextualizados	Tabla de intercambio <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td></td> <td>D1</td> <td>D2</td> <td>...</td> <td>DN</td> </tr> <tr> <td>T1</td> <td><math>a_{11}</math></td> <td><math>a_{12}</math></td> <td></td> <td><math>a_{1m}</math></td> </tr> <tr> <td><math>\vdots</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>		D1	D2	...	DN	T1	$a_{11}$	$a_{12}$		$a_{1m}$	$\vdots$					Ecuación vectorial $\vec{a}_{m1}x_1 + \vec{a}_{m2}x_2 + \dots + \vec{a}_{mn}x_m = \vec{b}$
	D1	D2	...	DN													
T1	$a_{11}$	$a_{12}$		$a_{1m}$													
$\vdots$																	

Paredes del contenedor Sistema de ecuaciones	$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$ $a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$ $\vdots$ $a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$	Ecuación matricial $A\vec{x} = \vec{b}$
Propiedades del contenedor Matrices, $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$ Vector, $V_n = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ Espacio generado	Operatividad Matricial A+B A-B $\alpha A$ AB  $\vec{v} + \vec{w}$ $\alpha \vec{w}$ Combinación lineal	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$ $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ $V_n = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ $\vec{a}_{m1}x_1 + \vec{a}_{m2}x_2 + \dots + \vec{a}_{mn}x_n = \vec{b}$

La metáfora del contenedor presente en el trabajo de los economistas tiene que ver básicamente con la idea de que las matrices o las tablas que guardan a los vectores y donde se establecen una serie de asociaciones entre los modelos económicos planteados en una tabla, un sistema de ecuaciones y las matrices.

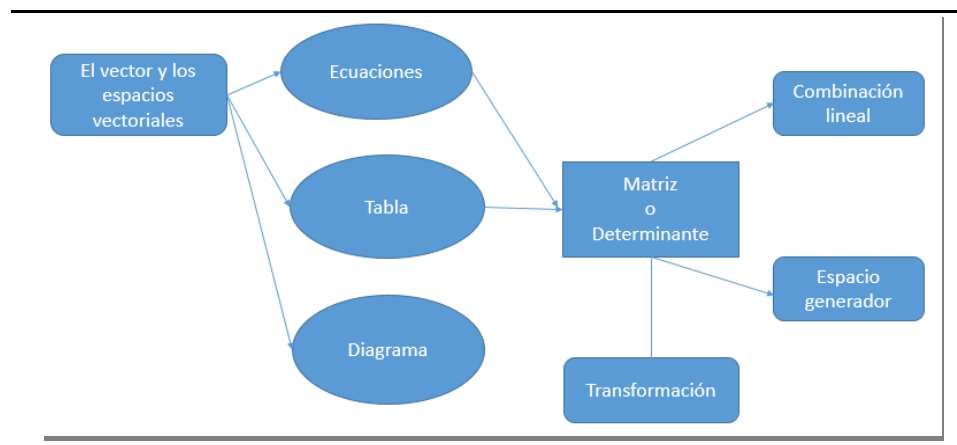
Mientras que el uso que dan los estudiantes de economía a los signos, en general es en forma de símbolos y sólo en algunos casos los usan como indicadores, pero este tratamiento no es relevante para la solución del problema debido a que no tienen que modelar.

A continuación se presenta una primera aproximación a las redes metafóricas observadas en esta segunda parte del estudio. A diferencia de los problemas de movimiento, la metáfora del camino es usada marginalmente en el tratamiento debido a que no hay procesos que se deban modelar y porque la idea de cambio puede ser resuelta en términos matemáticos por lo que se pueden colocar en el terreno de la matemática.

Respecto al análisis de las redes metafóricas presentes en esta etapa, del que sólo se cuenta con resultados preliminares, proponemos el siguiente esquema que sugiere una aproximación del tipo de asociaciones que se han observado que hacen los estudiantes respecto a los conceptos que apoyan la teoría de los espacios vectoriales.



Imagen 5. Resultados preliminares del tipo de redes metafóricas observadas.



Dentro del tipo de dificultades detectadas en la interpretación y operación de los vectores observamos que los estudiantes presentan problemas para operar los espacios vectoriales asociados, debido a que estos requieren de una interpretación que no está en el terreno de la operatividad sino de la interpretación económica, en seguida se presentan algunas conclusiones provisionales del presente estudio.

### **Discusión y Conclusiones Provisionales**

A partir de la primera parte del estudio hemos detectado un problema en el aprendizaje de los vectores y espacios vectoriales que se relaciona con tres aspectos, a saber: 1) El uso excesivo del signo asociado a los vectores como flechas, particularmente en los problemas que involucran movimiento; 2) No hay una discriminación semiótica adecuada sobre el uso dado a las flechas ya que se usan como índices, íconos o símbolos sin mediar diferencia; y 3) En problemas que plantea la modelación de procesos prácticos en donde los estudiantes tienen inconvenientes para dar sentido a la transformación del sistema de referencia, así como a un uso no matemático del signo vector

También, se observó la presencia de una metáfora básica que guió a los estudiantes: “la metáfora del camino”, sin embargo, para poder calcular y dar sentido matemático a la interpretación apoyada en las metáforas requiere de: 1. Una apropiada metáfora y 2. El uso de los signos como símbolos.

Respecto a la segunda parte del trabajo podemos decir que observamos la aparición de otro tipo de metáforas y esto se debió a 1. La ausencia de los vectores como

flechas y 2. A que los problemas que están ligados al movimiento, en cambio observamos otra metáfora básica que es la de contenedor, en tanto que la del camino aparece ligada a los procesos económicos que crecen o decrecen y son resueltos dentro de la matemática como en el tipo linking. En esta segunda etapa aún falta revisar el tratamiento dado a los signos y su relación con las metáforas presentes en las distintas etapas del trabajo, así como explorar el tipo de redes y los nodos que relacionan los diferentes contenidos matemáticos.

## Referencias

- Arenzana, V. (junio de 1997). El lenguaje vectorial en geometría: los pioneros William Rowan Hamilton y Herman Günther Grassmann. *Suma* (25), 61-70.
- Barabási, A. L. (2003). *Linked: How everything is connected to everything else and what it means for business, science, and everyday life*. New York: Plume.
- Berger, M. (2005). Vygotsky? is theory of concept formation and Mathematics education. *Proceedings of 29th conference of the psychology of Mathematics Education* (págs. 153-160). Melbourne: PME.
- Bolite Frant, J.; Acevedo J. I. y Font, V. (2005). Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática analisando matáforas na dinâmica. do processo de ensino de gráficos de funções. *Boletim GEPEN*, 46, 41-54.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. USA: Taylor & Francis.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill.
- Johnson, M. (1987). *The body in the Mind: the Bodily Basis of Meaning, Reason and Imagination*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lakoff, G. y Johnson, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Cátedra.
- Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.
- Nguyen, N. L., & Meltzer, D. (2003). Initial understanding of vector concepts among students in introductory physics course. *American Association of Physics teachers American Association of Physics teachers*, 71(6), 630-638.
- Mowat, E. y Davis, B. (2010). Interpreting Embodied Mathematics Using Network Theory: Implications for Mathematics Education: Implications for Mathematics Education. *Complicity: An International Journal of Complexity and Education*, 7(1), 1-31.
- Peirce, C. S. (1931-1958): *Collected Papers. Vols. 1-8*, C. Hartshorne, P. Weiss, and A. W. Burks (eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Radford, L. (2001). Signs And Meanings In Students' Emergent Algebraic Thinking: A

Semiotic Analysis. *Educational Studies In Mathematics*, 42; 237–268.