MATEMÁTICA FUNCIONAL EN UNA COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO. EL CASO DE LA ESTABILIDAD

E. Johanna Mendoza Higuera y Francisco Cordero
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
ejmendoza@cinvestav.mx; fcordero@cinvestav.mx

En esta investigación se trata de construir un marco de referencia que caracterice y estructure los usos de la estabilidad en situaciones específicas. Se estudiarán las resignificaciones de los usos en escenarios de la ingeniería, la escuela y el trabajo. La problemática en cuestión, consiste en que suceden usos del conocimiento matemático propios de su cotidiano disciplinar (como la ingeniería) y diferentes de la Matemática Escolar. Buscamos identificar, en las prácticas del ingeniero, del docente y del ingeniero en formación, aspectos de funcionalidad que permitan construir un diálogo entre el aula y la realidad. En este avance de investigación se mostrará, grosso modo, una resignificación de la estabilidad desde el estudio de la obra de Lyapunov. Con ello, pretendemos ir conformando una construcción social que oriente el diseño de situaciones para el aula en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales lineales.

Palabras clave: construcción social, matemática funcional, estabilidad, ingeniería.

Introducción

Los modelos educativos han buscado por años que el conocimiento que se enseña en las escuelas mejore las condiciones de vida de nuestras sociedades. Múltiples ejemplos han demostrado que este objetivo aún no se alcanza. La escuela se encuentra alejada de la realidad del estudiante y, en general, de las comunidades donde se encuentra inmersa. Algunos trabajos de nuestra disciplina, han reportado que la matemática escolar no trasciende al cotidiano del estudiante (Gómez, 2015): lo que "aprende" en la escuela, se queda en la escuela. Por otro lado, el conocimiento de la gente no es considerado como un marco de referencia para entender el conocimiento del estudiante. Se desconocen los usos de conocimiento matemático en los diferentes escenarios no escolares en los que se desenvuelve la gente. En general, en los objetivos educativos interesa conocer *lo que sabe* un estudiante y no así *cómo usa su conocimiento* (Cordero, en prensa). Se afirma que en estos escenarios no escolares, el ciudadano que actúa ante una situación específica, se vale de justificaciones que le son funcionales y no a si de justificaciones que necesariamente responden a un razonamiento lógico matemático. Es decir, estas justificaciones funcionales responden a lo que es de utilidad a la gente (Cordero, Mena y Montalto, 2010). Así, se observa una débil relación entre la matemática escolar y la matemática de la gente, la una no afecta a la otra.

Además, el docente de matemáticas no cuenta con un marco de referencia que le ayude a articular los usos del conocimiento matemático de la gente, su funcionalidad y resignificaciones (Soto, 2014). Por ello, interesa identificar los usos del conocimiento matemático en escenarios del cotidiano donde se rescate el conocimiento de la gente, del trabajador, del que aprende, del nativo.

Es así que nuestro programa de investigación socioepistemológico se propone como tarea reconocer los significados que la gente construye alrededor de las nociones matemáticas en situaciones específicas de su cotidiano (escuela, trabajo, ciudad). Estas significaciones, darán cuenta de una transversalidad de usos del conocimiento matemático, en tanto que cada escenario dibuja funcionamientos y formas que debaten con otros funcionamientos y formas generando así resignificaciones.

En particular, en esta investigación, buscamos identificar los usos del conocimiento matemático en situaciones de estabilidad en el cotidiano de la ingeniería (ingeniero en su profesión, ingeniero investigador, ingeniero en formación). Se busca inferir usos de conocimiento en la obra matemática, que en conjunto dibujen un desarrollo de usos y así resignificaciones de la estabilidad. Todo lo anterior caracteriza una transversalidad de usos del conocimiento matemático, específicamente de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales.

La tarea de la investigación consiste en caracterizar elementos de la funcionalidad de la estabilidad *desde* la transversalidad entre la obra matemática, la ingeniería y el cotidiano del ciudadano. Todo esto articulado conformará una epistemología de usos para el rediseño del dME. Identificar usos de la matemática *desde* la ingeniería, tanto en su *saber* como en el *hacer*, así como la intencionalidad para llevarlo al aula, obligarán a identificar un constructo de diálogo continuo y permanente entre las comunidades de conocimiento involucradas, y de esta manera contribuir en la problemática de aprendizaje de la matemática en la ingeniería.

Por lo anterior, nos preguntamos ¿Cuáles son los elementos que estructuran una transversalidad de usos de conocimiento matemático, específicamente de la estabilidad, que permitan el diseño de situaciones de aprendizaje acorde a los objetivos de formación de los ingenieros?

En este escrito, se plantea la problemática en relación con la matemática en la formación de los ingenieros, daremos a conocer el marco teórico que fundamenta nuestra investigación, así como un avance, que se relaciona con las preguntas ¿cómo y por qué surge la teoría de estabilidad por A.M. Lyapunov.

Matemáticas en la formación de los ingenieros

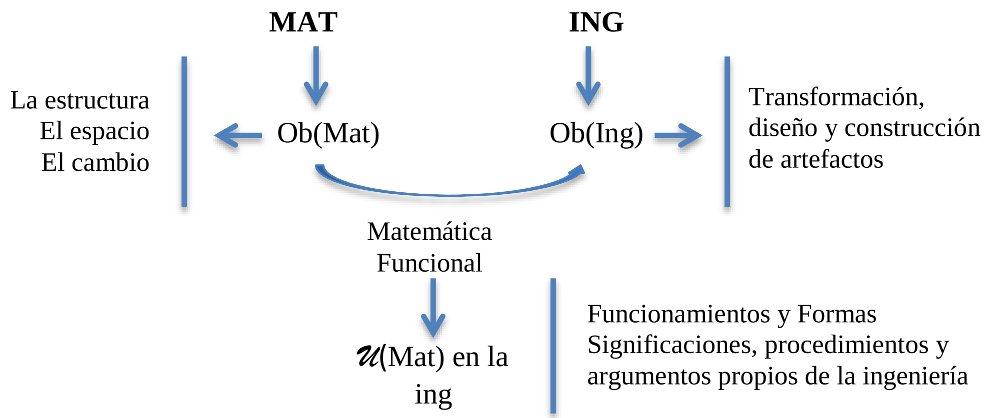
¿Cuál es el estatus de la matemática en la formación de ingenieros? Según Cajas (2009) se observa, por tradición, que la cadena curricular: ciencias básicas, ciencias de la ingeniería y cursos profesionales, conlleva a ver a la ingeniería como una aplicación de la ciencia. Y difícilmente, a pesar de las reformas y de las investigaciones se observan aspectos particulares de la ingeniería; ajenos al dominio científico, como el diseño, en la formación de los ingenieros.

Indudablemente, hay una tradición en la formación del ingeniero, así como del sector productivo que busca ingenieros capaces de resolver problemas (Bourn y Neal, 2008). Por ello, las matemáticas son un núcleo importante en sus programas curriculares. Sin embargo, la cuestión es qué conocimiento matemático deberá ser enseñado o cuál es el marco de referencia del docente que enseña matemáticas a los ingenieros en formación.

La Matemática y la Ingeniería como campos de conocimiento tienen objetos de estudio diferentes (Lara y Cordero, 2007; Mendoza y Cordero, 2012). El objeto de estudio de la Matemática (Ob (Mat)) son la estructura, el espacio, el cambio, entre otros; objetos que no son, a priori, propios de la Ingeniería. Los objetos de estudio de la ingeniería (Ob (Ing)) son la transformación, diseño y construcción de artefactos, entre otros (Bourn y Neal, 2008, Cajas, 2009). Con estas consideraciones la Ingeniería es una disciplina con conocimiento propio que usa la matemática y no como una ciencia aplicada (Cajas, 2009) (ver figura 1).

Desde nuestra perspectiva, los usos dados por la ingeniería al conocimiento matemático ($\mathcal{U}$(Mat) en la ing) dan cuenta de la existencia de prácticas de referencia que expresan una funcionalidad de la matemática (Mendoza, 2013). Es clave hacer notar que la matemática es usada desde la ingeniería para resolver problemas propios de su campo y en sus términos (Goldman, 2004). Es decir, en sus prácticas suceden usos del conocimiento matemático que expresan sus funcionamientos y sus formas específicas (Cordero, 2008).

Figura 1. La ingeniería como una disciplina con conocimiento propio



Entonces el preámbulo de esta investigación consiste, por una parte, afrontar que cuando se aborda la problemática de la enseñanza de la matemática para la ingeniería, en general, prevalece el dominio matemático por encima del conocimiento de la ingeniería. Esto conlleva formular enseñanzas de la matemática ignorando los *usos del conocimiento matemático* en la propia ingeniería (Mendoza, 2013). Y, por la otra parte, la Matemática Educativa, como disciplina, reconoce una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, la cual asume como la problemática fundamental de la enseñanza de la matemática. Según Cordero (2001) la segunda debe reorganizar e interpretar a la primera para luego ser llevada al sistema escolar. En la matemática escolar no se toman en cuenta factores que, en conjunto, son los que posibilitan la creación de significados matemáticos: la forma como este conocimiento se ha constituido en saber, la existencia de un grupo humano que se organiza y que origina dicho conocimiento (Mendoza 2013).

La matemática escolar no tiene un marco de referencia que ayude a resignificar el conocimiento matemático para transitar en otros dominios de conocimiento, como la ingeniería. Esto conlleva construirlo, tomando como base una epistemología de la matemática *desde el ámbito de la ingeniería, la obra matemática y el cotidiano*, rescatando los aspectos funcionales, transversales y de resignificación (Mendoza y Cordero, 2012)

Antecedentes

Dos aspectos se tienen en cuenta en esta revisión. Por un lado, los resultados de investigación relacionados con la matemática y otros dominios de conocimiento, y por el otro, con los significados atribuidos a las ecuaciones diferenciales.

En las investigaciones realizados por Noss, Hoyles y Pozzi (2000) se explora cómo las matemáticas se utilizan en diversos contextos del trabajo: desentrañan su potencial y las limitaciones en cuanto al desarrollo de modelos útiles en las prácticas del trabajo. Sus investigaciones, muestran que las “matemáticas visibles” o las matemáticas escolares, casi siempre se relacionan con las actividades rutinarias; y que algunos de los profesionales usan un número significativo de métodos e incluso una amplia gama de estrategias mentales para la solución de problemas concretos en circunstancias muy específicas

Con la Teoría Socioepistemológica (TSE) se han realizado investigaciones donde se identifican prácticas sociales o de referencia que norman la construcción social del conocimiento matemático, así como los procesos de institucionalización en dominios específicos como la toxicología, la ingeniería biomédica, la ingeniería electrónica y de comunicaciones, entre otras. En general, estas investigaciones comparten el objetivo de aportar marcos de referencia para la reorganizar la matemática escolar, es decir, identificar categorías del conocimiento matemático que permitan elaborar diseños de situación mas *ad hoc* a las realidades del trabajo de los futuros profesionales, puesto que se han dado cuenta que se requiere entender la construcción de conocimiento matemático del ciudadano en su cotidiano (Tuyub, 2008; García-Torres ,2008; Vázquez, 2011; Rivera y Arrieta, 2007; Solís, 2012 y Mendoza, 2013; entre otros).

Por ejemplo Tuyub (2008) ejemplifica cómo el toxicólogo hace uso del concepto de función, pero en un sentido funcional, es decir, no se aprecia su formulación como aparece en el discurso Matemático Escolar, el cual se vale de una fórmula o regla de correspondencia. Sino más bien la funcionalidad del concepto de función consiste de las magnitudes en los procesos de cambio al realizar tablas o análisis de gráficas, García-Torres (2008) identifica dos procesos de institucionalización en los que estuvo inmerso el mecanismo de equilibración de las relaciones asimétricas, uno de estos procesos se refiere a la institucionalización de un saber experimental a un saber teórico y el otro es referido al aprendizaje de uno de los profesionales observados, pues se advierte la forma en que él va institucionalizando la práctica de producir cerámicas de calidad óptima, o la práctica de interpretar gráficas. También Vázquez (2011) identifica un uso de la estabilidad, en el modelo depredador-presa, que permite analizar el comportamiento del crecimiento de las especies. Aquí detecta a la graficación como una práctica social en el dominio de la biología.

Los tres estudios mencionados anteriormente, ofrecen a la Matemática Educativa una visión más amplia de la construcción social del conocimiento matemático en otros dominios donde la matemática no es el objeto de estudio. Esta visión a través de los procesos de institucionalización de las prácticas ofrece marcos de referencia que pudieran ayudar en la transferencia del conocimiento construido en estos contextos a la escuela. En este sentido, falta retomar estos trabajos para determinar las implicaciones de dicha transferencia de conocimiento.

Rivera y Arrieta (2007), reportan que su investigación surge al identificar una disociación entre la matemática escolar y las prácticas de uso de las matemáticas en otras comunidades. Reconocen que el conocimiento, en una comunidad, se construye al ejercer ciertas prácticas sociales. Identifican una práctica que denominan algoritmia, en ingenieros informáticos, en su trabajo y en actividades que no tienen que ver con la programación.

Por otro lado, Cajas (2009), quien investiga en la educación para la ingeniería, afirma que desde una concepción epistemológica, se ha considerado a las ciencias básicas como el fundamento para la formación de ingenieros, y es por ello, que los programas curriculares propuestos se dividen en tres grupos: las ciencias básicas, las ciencias de la ingeniería y los cursos profesionales. Es así, como el ingeniero en formación transita por estos tres grupos durante sus años de estudio. De hecho, se ha llegado considerar a la matemática como una ciencia básica en cualquier profesión, incluso como un conocimiento necesario para desempeñar cualquier labor.

En un segundo aspecto, como lo mencionamos al pricipio de la sección, los significados de las ecuaciones diferenciales, consideramos el trabajo de Solís (2012), porque establecen una relación entre las funciones de una ecuación diferencial que denominan comportamiento tendencial de las funciones y que teóricamente se conforma como una categoría del conocimiento matemático. Al plantear una relación simbiótica entre las nociones de predicción y simulación en el contexto de las ecuaciones diferenciales lineales de la forma $ay' + by = F(x)$ en un ambiente de modelación gráfica, los estudiantes construyen argumentos de comportamientos gráficos y algebraicos. Un aspecto a señalares el haber identificado que la solución $y(x)$ tiene un comportamiento tendencial hacia la función $F(x)$. Esto permite caracterizar la solución de la ecuación diferencial sin necesidad de resolverla. El argumento comportamiento tendencial de las funciones (ctf), analiza la tendencia al estudiar la forma de la gráfica de la solución de las ecuaciones diferenciales lineales (EDL). Esta categoría no se encuentra dentro de la estructura matemática y menos es considerada en el dME. Lo anterior, lleva a preguntarnos, si esta categoría, se constituye como un eje en la construcción de conocimiento de la estabilidad en situaciones específicas de la ingeniería y de la matemática misma.

Mendoza (2013) reporta usos de la graficación en una situación de acumulación de fluidos con ingenieros civiles en formación. Logró identificar la manera como reconocen el argumento de estabilidad en el análisis de patrones de tendencia con la variación, mediante la alternancia de dominios gráficos y analíticos. Así mismo, emerge la categoría del comportamiento tendencial de las funciones, en este caso, de las funciones que representan la altura del nivel del líquido acumulado en un recipiente y el gasto de entrada de líquido.

Lo mencionado anteriormente, no solo ratifica la falta de marcos funcionales para resignificar el conocimiento matemático en el dME, sino que evidencia que categorías como la modelación-graficación y el comportamiento tendencial de las funciones, están presentes en escenarios del trabajo y que habría que encontrar los caminos para trastocar el aula haciendo uso de ellas.

Teoría Socioepistemológica

Según Cordero (2008) algunas perspectivas teóricas como la Socioepistemología (TSE) han logrado formular que la matemática escolar es de naturaleza dual. Es decir, que la matemática es en algún momento objeto de estudio, y en otro es una herramienta al servicio de otras disciplinas, como la ingeniería. Así, existen profesionales usuarios del conocimiento matemático, que no son matemáticos y que usan la matemática como un instrumento en su práctica profesional. Es en el ámbito de la gente donde prevalece la justificación funcional (Cordero, en prensa; Cordero, Mena y Montalto, 2010). Y en este uso de conocimiento matemático, hay una intencionalidad definida por su cotidiano disciplinar (Tuyub, 2008).

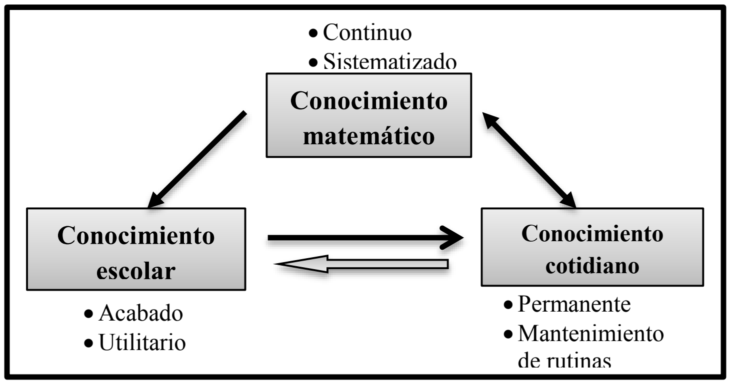
El rol de la justificación funcional, entra en juego en los estudios de la Matemática Educativa, los cuales presumen que esta justificación emerge, de manera natural, en las realidades que construye el ciudadano en las diferentes situaciones del trabajo, la escuela y la ciudad (Mendoza, 2013, Zaldívar y Cordero, 2012, Tuyub,, 2008).

Así, identificar elementos de la justificación funcional, amplía la problemática que conlleva la matemática escolar y ofrece formas de proponer otro marco de referencia para la enseñanza de la matemática en los diferentes niveles educativos (Cordero, 2013).

Entonces ¿cómo construir este marco?, ¿cómo identificar estos elementos?, ¿qué usos del conocimiento matemático suceden en otras disciplinas?

La TSE ha identificado tres escenarios diferentes de la matemática (ver figura 2): el conocimiento matemático, el conocimiento escolar y el conocimiento cotidiano, cada uno con diferentes funciones (López, 2012). Son varias las relaciones que se observan y que atañen a la problemática. Sin embargo, en este trabajo interesa la que relaciona el conocimiento escolar con el conocimiento cotidiano, debido a que podría ofrecer elementos para trastocar la matemática escolar. El sistema educativo formula que la matemática es enseñada para afectar el cotidiano del ciudadano, y tal vez por ello, el conocimiento escolar se establece *para* el conocimiento del ciudadano, pero no así en el otro sentido. (Cordero, 2013; Mendoza 2013). Conviene preguntarse ¿cómo conoce y usa el conocimiento un ciudadano? Es decir, ¿cómo es el uso del conocimiento desde el ciudadano?

Figura 2. Características de la matemática en sus diferentes escenarios (López, 2012).



Nos interesa entonces entender cómo un sujeto construye conocimiento desde su condición de ciudadano, en los diferentes escenarios en los que participa. Caracterizar los elementos de función y forma del uso del conocimiento en el cotidiano permitirán construir el marco de referencia ya mencionado.

Siendo nuestro interés, aportar elementos para el RdME, nos avocamos a interpretar la función social del conocimiento matemático en la ingeniería, en escenarios escolares y del trabajo.

Lo anterior, nos lleva a identificar la resignificación de la estabilidad en escenarios de la obra matemática, la ingeniería y la escuela. A continuación se muestra un avance de lo encontrado en la obra matemática.

Resignificación del conocimiento matemático en la Teoría de Estabilidad de Lyapunov

Los orígenes de la matemática se basan en el estudio de fenómenos de la naturaleza. La propiedad del movimiento de la estabilidad, surge de la necesidad de entender el movimiento de los planetas y la forma de sus órbitas. Es así, que matemáticos como Poisson, Poincaré, Lagrange, Lyapunov, entre otros; se ocuparon de estos aspectos (Hernández, 2000).

A.M. Lyapunov en 1922 escribe sus tesis doctoral *The General Problem of the Stability of motion*, en ella define cuándo la solución de una ecuación diferencial es estable o inestable y establece dos métodos para determinar el comportamiento de las soluciones, en tanto su estabilidad. Uno de los resultados es *el segundo teorema,* denominado hoy día, *el método directo de Lyapunov.* Los procedimientos se reducen a encontrar una función con ciertas características, que permitirá determinar si un sistema de ecuaciones diferenciales es estable o no.

En la sección 1, del capítulo I (análisis preliminar), Lyapunov (1992) define lo que considerará como estabilidad. En su definición hay que tener en cuenta que ε_j, ε'_j son constantes reales denominadas perturbaciones y que definen un movimiento no perturbado; $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ son funciones reales dadas y continuas de las cantidades $q_1, q_2, q_3, ..., q_k, q'_1, q'_2, q'_3, ..., q'_k$:

> […] Vamos a suponer que se encuentra soluciones particulares para estas ecuaciones
> $$q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \quad q_3 = f_3(t), \quad ..., \quad q_k = f_k(t),$$
> en las que las cantidades q_j son expresadas como funciones reales de t, solo dadas para q_j, cualquiera que sea el valor de t, valores reales.
> Para esta solución particular corresponderá un movimiento determinado de nuestro sistema. Comparándolo, en cierto sentido, con otros movimientos posibles para este sistema bajo la acción de las mismas fuerzas, lo llamaremos movimiento no perturbado, y todos los otros con los que lo compararemos serán llamados movimientos perturbados. (Lyapunov, 1992, p. 539)

En los párrafos anteriores, Lyapunov da las pautas para llegar a la definición de estabilidad. En el último define dos movimientos: un movimiento perturbado y un movimiento no perturbado. Esto lo hace, puesto que va a comparar al movimiento no perturbado con los movimientos perturbados cerca de él. Su interés es saber si permanecen *cerca* al transcurrir el tiempo.

> Tomando t_0 como un instante dado, vamos a designar los valores correspondientes de las cantidades q_{j0}, q'_{j0}.Sea
> $$q_{10} = f_1(t_0) + \varepsilon_1, \quad q_{20} = f_2(t_0) + \varepsilon_2, ..., \quad q_{k0} = f_k(t_0) + \varepsilon_k$$
> $$q'_{10} = f_1(t_0) + \varepsilon'_1, \quad q'_{20} = f_2(t_0) + \varepsilon_2, ..., \quad q_{k0} = f_k(t_0) + \varepsilon_k$$
> Donde $\varepsilon_{j0}, \varepsilon'_{j0}$ son constantes reales.
> Estas constantes, las cuales llamamos perturbaciones, definen un movimiento no perturbado. Vamos a suponer que podemos atribuirles valores suficientemente pequeños.
> Al hablar de movimientos perturbados cerca de un movimiento no perturbado, entenderemos por este movimiento en el cual las perturbaciones son suficientemente pequeñas en valor absoluto. (Lyapunov, 1992, p. 539)

Lyapunov se refiere con *cerca a* al tamaño de la variación del movimiento perturbado con respecto al movimiento no perturbado. Y es justamente una diferencia la que va a medir esta variación. Lo interesante acá, es la intención de la comparación, en tanto que se interesa en saber cómo se comportan un movimiento con respecto al otro.

> Después de estos preliminares, sea $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ funciones dadas reales y continuas de las cantidades $q_1, q_2, q_3, ..., q_k, q'_1, q'_2, q'_3, ..., q'_k$.
> Para el movimiento no perturbado ellos llegarán a conocer funciones de t, las cuales designaremos por $F_1, F_2, ..., F_n$ respectivamente. Para un movimiento perturbado serán funciones de las cantidades
> $$t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, ..., \varepsilon'_k.$$
> Cuando todas las $\varepsilon_j, \varepsilon'_j$ son iguales a cero, las cantidades $Q_1 - F_1, Q_2 - F_2, \quad ..., \quad Q_n - F_n$ serán cero para cada valor de t. Pero, sin hacer las constantes $\varepsilon_j, \varepsilon'_j$ cero, suponemos que son infinitamente pequeñas, se plantea la cuestión de saber si es posible asignar a $Q_s - F_s$ cantidades infinitamente pequeñas, tal que el valor absoluto de estas cantidades nunca los excederá. (Lyapunov, 1992, p. 539)

En el párrafo inmediatamente anterior, es clara la comparación que hace de los movimientos perturbado y no perturbado y la necesidad que estas cantidades sean suficientemente pequeñas para que $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ y $F_1, F_2, ..., F_n$ permanezcan cerca.

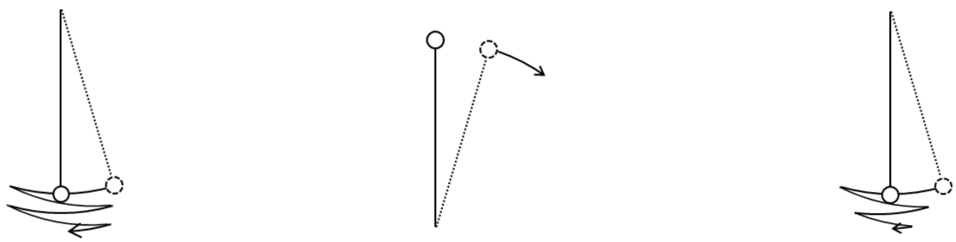
Finalmente acá está la definición que Lyapunov presenta para la estabilidad e inestabilidad de un movimiento no perturbado.

> Sean $L_1, L_2, ..., L_n$ números positivos dados. Si para todo valor de estos números, no importa lo pequeño, nosotros podemos escoger números positivos
> $$E_1, E_2, E_3, ..., E_k, E'_1, E'_2, E'_3, ..., \ E'_k$$
> tales que, las desigualdades
> $$|\varepsilon_j| \le E_j, \quad |\varepsilon'_j| \le E'_k \quad (j = 1,2,...,k),$$
> son satisfechas, tenemos
> $$|Q_1 - F_1| < L_1, \quad |Q_2 - F_2| < L_2, \quad ..., \quad |Q_n - F_n| < L_n,$$
> para todos los valores de t más grandes que t_0, el movimiento no perturbado será llamado estable con respecto a las cantidades $Q_1, Q_2, ..., Q_n$; en el caso contrario, será llamado, con respecto a las mismas cantidades, inestable. (Lyapunov, 1992, p. 540)

En la definición, se reconoce la necesidad de caracterizar dos movimientos: perturbado y no perturbado. Su variación, representada analíticamente por $Q_n - F_n$, es el procedimiento del que hace uso para determinar el comportamiento de *Q* con respecto a *F*. De fondo, lo que aparece acá es una búsqueda de comportamientos con tendencia o no, según sea el caso.

Si consideramos un sistema físico podremos ejemplificar la estabilidad del movimiento perturbado. Tomemos el movimiento de un péndulo simple de masa *m* que se balancea sin fricción al extremo de una varilla delgada y sin peso de longitud *l*. De acuerdo con la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento del péndulo es $-mgsen\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Ahora, si $\frac{d\theta}{dt} = x$, $\frac{dx}{dt} = -\frac{g}{l}sen\theta$ obtenemos un sistema autónomo. Al analizar el sistema con las consideraciones físicas, el péndulo está en equilibrio siempre que llegue al reposo en las posiciones $\theta = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Éstas son estables o inestables según n sea par o impar, respectivamente. Si nos detenemos en las posiciones donde n es par, es decir, donde el péndulo está suspendido verticalmente hacia abajo, y se aplica una fuerza que lo perturba se generan pequeñas oscilaciones cerca de este punto(figura 4.a).

Figura 4. (a) Péndulo verticalmente hacia abajo. (b) péndulo balanceado verticalmente hacia arriba. (c) péndulo con rozamiento (Boyce y DiPrima, 1977)



Ahora, cuando n es impar, es decir, donde el péndulo está balanceado verticalmente hacia arriba, y se aplica una pequeña fuerza que lo perturba, el péndulo terminará por apartarse de la posición de equilibrio, por ello se afirma que es inestable (Figura 4b)

Si se tienen en cuenta fuerzas de amortiguamiento debidas a la fricción y a la resistencia del aire, la ecuación diferencial que modela el movimiento es diferente a la mencionada anteriormente, pero, si se analiza desde la física, los puntos de equilibrio serían las mismas posiciones, solo que en este caso, la posición de equilibrio donde el péndulo está verticalmente hacia abajo, las fuerzas de amortiguamiento hacen que las oscilaciones desaparezcan con el transcurso del tiempo y cada vez se acercan más ésta, considerándose este punto como de equilibrio estable asintóticamente.

Para estudiar la estabilidad de las soluciones se requiere conocer cómo se comportan éstas con relación a sus puntos de equilibrio (movimientos no perturbados) según la definición anterior. Lyapunov desarrolló dos métodos que resolvieron muchos problemas. A continuación mencionaremos uno de ellos publicado en su tesis doctoral en la ítem 16:

> Teorema 1. Si las ecuaciones diferenciales de un movimiento perturbado son tales que es posible encontrar una función definida V, tal que la derivada V' es una función de signo fijo el cual es opuesto al de V, o se reduce idénticamente a cero, el movimiento no perturbado es estable (Lyapunov, 1992, p. 582)

Lo interesante acá, es que conocido el comportamiento de una función *V,* se puede conocer el comportamiento de las soluciones de un sistema de ecuaciones. Al parecer, Lyapunov, caracteriza el comportamiento de movimientos perturbados estables conocidos y busca una función que pueda permitirle modelar este comportamiento y así decidir cuáles movimientos perturbados no conocidos, son estables o no.

Así, Lyapunov estudia el comportamiento de las soluciones de un sistema de ecuaciones autónomo, con base en el comportamiento de una función con ciertas características específicas. Si esta función *V* existe, expresa la tendencia en el comportamiento de las soluciones, pues indica que éstas permanecen cerca del punto de equilibrio o que tienen hacia él.

La revisión anterior, nos ha permitido identificar aspectos de la estabilidad que no son visibles en el dME, donde importa saber si las soluciones del sistema son estables o no. Lyapunov aborda el problema de la estabilidad al buscar la relación entre dos movimientos, no se puede hablar del uno sin el otro, de hecho, ésta interpretación da pie para construir comportamientos deseables, es decir, conocido un comportamiento dibujar otro que se parezca a él.

A modo de cierre

En este escrito se ha mostrado la problemática identificada en la enseñanza de la matemática en la ingeniería. Inicialmente se ha estudiado la teoría de la estabilidad de Lyapunov para identificar el cómo y el por qué de esta noción y los significados relacionados con las ecuaciones diferenciales. La problemática y lo encontrado en la teoría de estabilidad, nos llevan a estudiar las prácticas de la ingeniería donde se identificarán situaciones específicas donde se resignifica la estabilidad. Todo esto con el objetivo de formular los aspectos funcionales y transversales.

Agradecimientos

Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto las Resignificaciones del Uso del Conocimiento Matemática: la Escuela, el Trabajo y la Ciudad. Clave 0177368.

Referencias

Bourn, D. y Neal, I. (2008). *The Global Engineer. Incorporating global skills within UK higher education of engineers*. London: Engineers Against Poverty.

Boyce, W. y DiPrima, R. (1977). *Elementary differential equations and boundary value problems (Third edition)*. USA: Wiley.

Cajas, F. (2009). El conocimiento de ingeniería como conocimiento escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (22), pp. 77 – 84. México: CLAME A.C.

Cordero, F. (en prensa) Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Ar rieta y L. Díaz. *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa*. España: Gedisa.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265-286). México, D.F.: Díaz de Santos-CLAME A.C.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), pp. 103-128.

Cordero, F., Mena, J. y Montalto M.E. (2010) Il ruolo della giustificazione funzionale in una situazione di risignificazione dell`asintoto. *l´insegnamento della Matematica*, .33B (4). Pp. 457-488.

García-Torres, E. (2008). *Un estudio sobre los procesos de institucionalización de las prácticas de ingeniería biomédica. Una visión socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México, D.F.

Goldman, S. (2004). Why we need a philosophy of engineering: a work in progress. *Interdisciplinary Science Reviews 29*(2), pp. 163 -176.

Gómez, K. (2015*). El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la Ingeniería Agrónoma.* Tesis de doctorado no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México.

Hernández, L.M. (2000) Sobre el Método de Lyapunov. *Foro-Red-Mat:Revista electrónica de contenido matemático 10(2).* México : UNAM

Lara, A. & Cordero, F. (2007). Categorías de uso de las gráficas en Ingeniería. En C. Crespo (Ed.) *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*, (20), pp519 -524.

López, S. (2012). *Un estudio de la matemática del ciudadano*. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México.

Lyapunov, A.M. (1992) The general problem of the stability of motion. En Fuller, A.T. (Ed.) *The general problem of the stability of motion*. Taylor & Francis: London.

Mendoza, E. (2013). *Matemática funcional en una comunidad de conocimiento: el caso de las ecuaciones diferenciales lineales en la ingeniería*. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México.

Mendoza, E. & Cordero, F. (2012). El uso de las ecuaciones diferenciales y la ingeniería como comunidad de conocimiento. En Flores, R (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (25), pp. 1023-1030. México: CLAME.

Noss, R., Hoyles, C. & Pozzi, S. (2000). Working Knowlegde: Mathematics in use. Bessot & Ridgway (eds.), *Education for Mathematics in the Work*place, (pp. 17-35). Holanda: Kluwer Academic Publischers.

Rivera, M. y Arrieta, J. (2007). La algoritmia; una práctica social de las comunidades de ingenieros en sistemas computacionales. En C. Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp. 456-460. México: CLAME A.C.

Solís, M. (2012). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo. Caso de la* *predicción y la simulación en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden*. Tesis doctoral no publicada. DME. CINVESTAV – IPN, D.F. México.

Tuyub, I. (2008). *Un estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento.* Tesis de Maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México.

Vázquez, E. (2011). *Funcionalidad de la estabilidad en la biología. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México.

Zaldívar, D y Cordero, F (2012) Un estudio socioepistemológico de lo estable. Consideraciones en un marco de la divulgación del conocimiento matemático. A. Oktaç, R. Chávez, O. Covián, J. López y M. Méndez (Eds.). *Memorias del Primer Coloquio de Doctorado*. Pp. 203 -212. DME, CINVESTAV-IPN, México.