

SIGNIFICADOS ASOCIADOS A LAS FUNCIONES SINUSOIDALES POR ESTUDIANTES DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Martínez Ortega, Minerva

Cinvestav del IPN

cetis76@hotmail.com

Mejía Velasco, Hugo Rogelio

Cinvestav del IPN

hmejia@cinvestav.mx

A través de las funciones trigonométricas es posible modelar fenómenos periódicos. La mayoría de los alumnos de bachillerato desconocen los conceptos involucrados con las funciones trigonométricas, situación que es posible solventar si se empieza por identificar y analizar los significados que acerca de ellas construyen los alumnos; en particular, de las funciones sinusoidales. Bajo esta hipótesis se diseñó esta investigación cuyo objetivo fue identificar los significados que construyen los alumnos de este nivel educativo sobre las funciones sinusoidales y sus representaciones gráficas a partir de la interacción con algunos fenómenos físicos periódicos y la mediación de herramientas digitales, como simuladores, sensor de movimiento y programas graficadores. Esta investigación muestra que relacionando de manera cíclica el modelo sinusoidal con fenómenos armónicos, es factible que los alumnos logren asociar significados a parámetros como periodicidad, amplitud, desfase, entre otros, a las funciones sinusoidales.

Funciones sinusoidales, periodicidad, significado, representación gráfica, sensores de movimiento.

Funciones Sinusoidales

El concepto de función impregna cada rama de las matemáticas y ocupa una posición central en su desarrollo. La Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (NCTM por sus siglas en inglés, 2000), recomienda que este concepto se trate desde el noveno hasta el doceavo grado y, progresivamente en los niveles subsecuentes se agreguen factores que favorezcan un entendimiento del tema. Esto con la finalidad de cubrir los siguientes objetivos: a) Aplicar trigonometría a situaciones problema que involucren triángulos y b) Explorar fenómenos periódicos de la vida real, usando las funciones seno y coseno en el tratamiento matemático de fenómenos naturales periódicos.

Es incuestionable que para comprender la física y las matemáticas, es indispensable un buen entendimiento de las funciones trigonométricas; sin embargo, existe un número reducido de investigaciones acerca de las habilidades de razonamiento necesarias para entender y usar las funciones seno y coseno (Moore, 2010), y del uso de herramientas que medien entre el objeto conceptual variación periódica y la comprensión de éste por parte de los alumnos. Por lo que, asumiendo las dificultades que la producción y análisis de gráficas cartesianas representan para los alumnos (ver Radford, 2009), nos apoyamos en éstas para identificar: ¿Qué significados pueden construir los alumnos del nivel medio superior al establecer conexiones entre determinados fenómenos físicos periódicos y los parámetros de las representaciones gráficas de las funciones sinusoidales? y ¿Qué repercusión tiene en la construcción de significados de las funciones sinusoidales, el uso de ciertas herramientas digitales?

Las preguntas anteriores orientan nuestra investigación en la que pretendimos:

1. Analizar, describir y sistematizar la forma en que los alumnos relacionan ciertos fenómenos físicos periódicos con las funciones sinusoidales.
2. Describir y analizar los argumentos que utilizan los alumnos, para probar y justificar conjeturas cuando se emplean herramientas digitales en la construcción de significados de las funciones sinusoidales.

Marco Teórico

Balacheff (1990) menciona que un tema clave de la problemática en el área de la matemática educativa es el *significado*, término íntimamente relacionado con *comprensión*. Para Sierpinska (1990, p. 27): *comprender un concepto es concebido como el acto de captar su significado*.

En este trabajo se describen procesos de construcción de significado de los parámetros de las funciones sinusoidales: A , ω , ϕ_0 , amplitud, frecuencia angular y fase inicial, respectivamente; así como la relación fundamental de estas funciones: $T = 2\pi / \omega$, el nexo entre el periodo y la frecuencia.

El enfoque tradicional de la enseñanza de las funciones sinusoidales las presenta a través de la expresión $y = A \cdot \text{sen}(\omega x + \phi_0) + B$, haciendo referencia a la relación $T = 2\pi$ y mostrando la gráfica de $y = \text{sen}(x)$, después plantea actividades para que los estudiantes *descubran* la relación entre parámetros y modificaciones en las gráficas. Si las cosas *funcionan*, se construyen esas relaciones pero, al margen de los fenómenos

periódicos, de modo que, el significado físico de los parámetros es desconocido y conjeturamos, esto limita la comprensión de las funciones sinusoidales.

Todo proceso de aprendizaje está mediado por una herramienta o artefacto que puede ser material o simbólico, ejemplo de estos últimas son las tecnologías simbólicas.

Además de representar objetos, la tecnología permite representar acciones sobre los objetos.

Las tecnologías simbólicas pueden servir de *amplificadores* y *re-organizadores* de la actividad intelectual, (Moreno, 2014, p. 34). El uso de la herramienta es *amplificadora* porque gracias a ella se potencia la posibilidad de exploración de los objetos matemáticos (de sus representaciones), acciones poco posibles de realizar o apreciar sin el artefacto que sirve de *mediador* entre el conocimiento y la persona que aprende. Pero el papel más importante de la tecnología consiste en la posibilidad de *reorganizar la cognición*. Los sensores de movimiento permiten dar un tratamiento a las gráficas de movimiento, de manera distinta a los enfoques clásicos de lápiz y papel. La tecnología digital abre nuevas posibilidades a la cognición, o plantea su *reorganización* de una manera que, desde el punto de vista didáctico, puede resultar más adecuado.

Aunado al marco semiótico y al del uso de la tecnología, consideramos los significados institucionales que con respecto a las funciones sinusoidales un alumno de bachillerato debería tener (Tabla 1 del apartado siguiente), por ello se hace un estudio comparativo entre dichos significados y los significados que construyen los alumnos de un grupo objeto de estudio.

Diseño de la Investigación

La investigación es de tipo cualitativa en la modalidad de estudio de casos. Se trabajó con un grupo de 10 alumnos, participantes voluntarios, de 15 a 16 años de edad. Fue un grupo de jóvenes recién ingresados al nivel medio superior, lo que supuso que no tenían ningún conocimiento de los elementos y características de las funciones sinusoidales.

Para poder dar respuesta a las preguntas de investigación y cumplir con los objetivos planteados en 5 sesiones de 2 horas se realizaron acciones que permitieron reconocer y analizar los significados que los participantes construyen de las gráficas de funciones sinusoidales.

Los fenómenos analizados, tanto física como gráficamente, fueron el sistema masa resorte, la representación de Fresnel y el movimiento pendular; este último es el que se describe a detalle en este reporte.

Dichos significados se contrastaron con los significados, que en el contexto institucional, se espera que un alumno de bachillerato asocie a las gráficas de las funciones objeto de estudio, en este caso particular cuando se analiza el movimiento pendular. (Tabla 1).

A fin de conocer los significados que los participantes asocian a las gráficas de las funciones sinusoidales y cómo relacionan a éstas últimas con el movimiento periódico, para así contrastar dichos significados con los significados institucionales, se diseñaron 3 actividades.

Las herramientas que se emplearon para generar las gráficas cartesianas, fueron un sensor de movimiento y un programa graficador. En la primera etapa de la investigación, se ambientó a los participantes en el uso del sensor y se pidió a los jóvenes reproducir con la mayor precisión posible, haciendo movimientos del cuerpo, una gráfica del tipo sinusoidal. En la segunda etapa, se estudió el movimiento pendular; para simular a este fenómeno, se empleó una malla o red unida a un soporte universal, y dentro de la malla, se colocaron pelotas de diferente masa.

Tabla 1. Significados de las funciones sinusoidales

SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES ASOCIADOS A LAS GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES SINUSOIDALES CUANDO SE ANALIZA EL MOVIMIENTO PENDULAR
Los fenómenos físicos periódicos se pueden analizar y comprender a través de su representación gráfica.
Las gráficas de las funciones sinusoidales representan fenómenos físicos periódicos.
La relación establecida en una gráfica cartesiana no es una representación icónica de dicha relación.
Los elementos que están involucrados en este tipo de funciones son: Longitud de la cuerda, masa, ángulo de oscilación, amplitud, período de oscilación, desfase o desplazamiento horizontal y desplazamiento vertical.

En principio se pidió a los participantes que expusieran su predicción, esto es, que dijeran qué forma debería tener la gráfica y, posteriormente, se contrastó ésta con la generada por el sensor de movimiento. La última etapa de la investigación, se estableció para que los participantes identificaran y determinaran cómo se relacionaban los

parámetros de la función sinusoidal con el fenómeno físico analizado y cómo podían representarse matemáticamente las oscilaciones periódicas.

Desarrollo y Análisis de Actividades

Actividad 1.

Esta actividad explota la producción de la gráfica prácticamente en *tiempo real*, esto es, los participantes tienen la sensación de producir la gráfica a voluntad, generando gráficas muy parecidas a las que se les solicita.

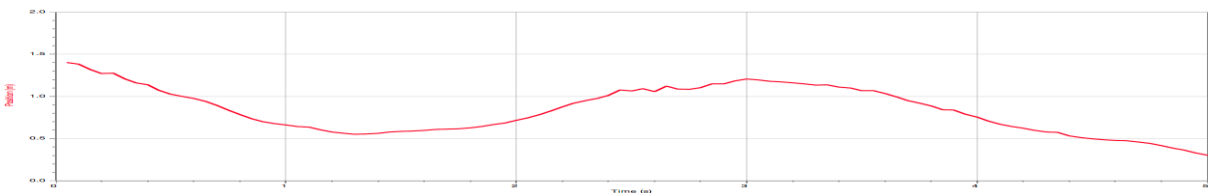
Objetivo: Ambientar a los participantes con el equipo e identificar y asociar la manera en que se representa el movimiento en una gráfica cartesiana; con la ayuda del sensor de movimiento.

Se solicitó a los participantes moverse frente al sensor y observar la gráfica desplegada. Los jóvenes identificaron en las gráficas obtenidas, características asociadas a su movimiento, a formas totalmente naturales de desplazamiento.

Posteriormente, se presentó a los implicados una gráfica sinusoidal y se les solicitó, que caminando, hicieran los movimientos necesarios para reproducir dicha gráfica con la ayuda del sensor.

Los participantes caminaron empleando diferentes estrategias, como tratar de seguir la representación icónica de la gráfica, o levantando las rodillas; o bien, asociaron el tipo de gráfica a la velocidad con la que se desplazaban. Después de un número considerable de intentos, Carlos un joven de 15 años se le ocurrió que el movimiento debía ser *haciendo lo mismo varias veces: ir y regresar, avanzar y retroceder* frente al sensor. Carlos caminó dando dos pasos hacia el sensor y dos pasos alejándose de él.

Gráfica 1. Representación generada por Carlos



Profesora: ¿Por qué se te ocurrió que el movimiento debía ser así?

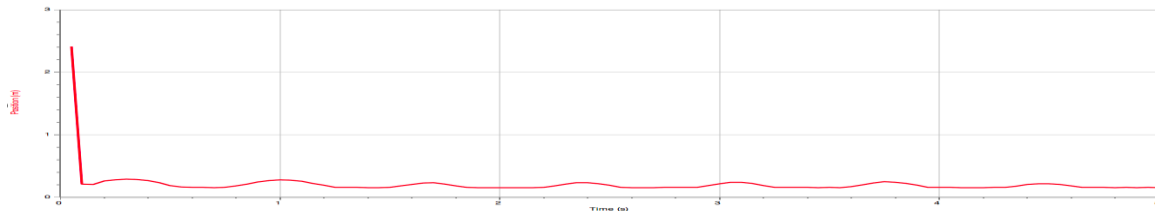
Carlos: Porque si me acercaba (hacia el sensor), iba 'bajando' (\) la gráfica; si me aleja del sensor, iba 'subiendo' (/) la gráfica.

Después de realizar esta acción, Carlos asoció este tipo de gráficas al movimiento periódico, ¿por qué? Él plantea lo siguiente:

Carlos: ¿Se puede poner la mano en el sensor?

Carlos se refirió a que el movimiento de su mano frente al sensor generaría la gráfica solicitada, acercándola y alejándola repetidas veces, aplica su idea; la gráfica obtenida presenta al inicio un rasgo no periódico, los participantes identifican que dicho registro es por un movimiento brusco de la mano; sin embargo, del segundo 0.5 en adelante, los jóvenes comprueban que es válida la conjetura planteada por su compañero, ya que Carlos obtuvo una gráfica con rasgos similares a la solicitada.

Gráfica 2. Representación generada por Carlos con la mano



Actividad 2.

Esta actividad se llevó a cabo con la adaptación de un soporte, una malla (a la cual se le puede ajustar el largo) y pelotas de diferentes masas, para simular el movimiento que genera un péndulo simple, con el objetivo de identificar los significados que los participantes asocian al movimiento periódico. El movimiento se representó en el plano cartesiano. En principio se pidió a los participantes que expusieran su predicción, esto es, que dijeran qué forma debería tener la gráfica y, posteriormente, se contrastó ésta con la generada por el sensor de movimiento.

Se solicitó a los participantes bosquejar la gráfica de posición contra tiempo, cuando se hizo oscilar el péndulo. Solamente tres elementos lograron bosquejar la gráfica de manera correcta, justificando que recordaron lo que ocurrió en la actividad 2, cuando se pidió reproducir la gráfica sinusoidal con movimientos del cuerpo. Para verificar o rectificar la gráfica bosquejada por cada alumno, se obtuvo la gráfica del movimiento pendular a través del sensor. Cabe hacer mención que la gráfica obtenida por Carlos en la actividad anterior y las obtenidas por el sensor del movimiento pendular, no correspondían a una representación exacta de una función sinusoidal, mediante una discusión entre los alumnos y la profesora se determinaron los orígenes de dichas variaciones, como por ejemplo que en el movimiento corporal es muy difícil de mantener el mismo patrón, o que los movimientos de los brazos produjeron

alteraciones; o bien, que en el movimiento pendular aún y cuando la fricción era mínima, ésta se vió reflejada en la gráfica y no fue posible obtener de manera exacta una gráfica sinusoidal; motivo por el cual, cuando se consideró necesario, con la ayuda de la opción *analyze-model* del programa graficador empleado, se ajustaron dichas gráficas a una función sinusoidal ideal.

Como los participantes no conocían las funciones seno y coseno, se discutió con ellos algunas características de las funciones sinusoidales; el rasgo a resaltar, en palabras de los jóvenes: *la repetición o existencia de un patrón*. Finalmente, se modificaron las masas de las pelotas (3 objetos diferentes) y el largo de la malla (3 longitudes diferentes), y se obtuvieron mediante el sensor, las gráficas correspondientes, se pidió a los participantes que compararan las similitudes y diferencias de las gráficas. La mayoría concluyó que *la masa es independiente de las gráficas y que las posiciones de las pelotas en las gráficas, eran iguales o muy similares*. Con respecto al largo de la malla (longitud del péndulo), los participantes ubicaron que *el largo de ella sí afectaba a las gráficas en el tiempo que tardaban en hacer su trayectoria*.

Actividad 3.

El objetivo de esta actividad fue identificar y determinar, cómo se relacionan los parámetros de la función sinusoidal con el fenómeno físico analizado y cómo pueden representarse matemáticamente las oscilaciones periódicas.

Se eligió aleatoriamente una gráfica, de las obtenidas en la actividad anterior, se solicitó a los participantes señalar los elementos que observaban en la gráfica, primero identificaron las **oscilaciones**, los sujetos de estudio las refirieron como *montañas o máximos*, en un principio solo mencionaron las oscilaciones simples, después de un análisis, concluyeron que hay *montañas invertidas* y que deben considerarse, la justificación la dio Carlos: *“las montañas representan las idas de la pelota y las montañas invertidas los regresos de la pelota.”* La maestra estableció que lo mencionado por Carlos se conoce como oscilación, Samantha (otra alumna), definió el concepto de oscilación como *“la distancia que recorre la pelota cuando va, más la distancia recorrida cuando la pelota regresa”*, la profesora mencionó que el tiempo que tarda una oscilación, se conoce como **período (P)**.

La **amplitud**, el segundo elemento mencionado por los jóvenes, fue asociado con *la altura de las montañas*, la maestra retomó la idea de *máximo*, como el punto más alto de la montaña o curva cóncava, y añadió al *mínimo*, como el punto más bajo de la montaña invertida o curva convexa, al igual que el período, el valor de la amplitud, es posible determinarlo con la opción *explore* del menú *analyze*, del programa de cómputo

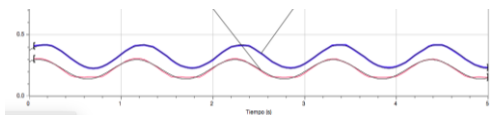
empleado en la investigación. Sin embargo, la maestra mencionó un procedimiento analítico para calcular la amplitud $|A|$.

Al preguntar a los participantes qué representaba la amplitud en el fenómeno físico, fue necesario repetir el experimento del péndulo y después de un largo análisis, un participante, Zacarías, mencionó que la amplitud era el *dibujo de las oscilaciones*, Carlos definió lo siguiente: *lo que el péndulo abre (ángulo de oscilación) es lo que en la gráfica se ve como la altura*, refiriéndose correctamente, al valor de la amplitud.

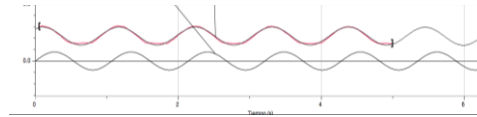
El desplazamiento vertical (V), fue identificado como la distancia de la masa (en la posición de equilibrio) al sensor, Samantha mencionó que *“a mayor distancia (entre la masa y el sensor, la gráfica sale más arriba.”*

Para los participantes **el desfase, desplamiento inicial, fase inicial o ángulo inicial** (Gráfica 4), acorde con que este es el parámetro más difícil de asociar con un significado matemático o con una variable física, no tuvo significación alguna.

Gráfica 3. Desplazamiento vertical



Gráfica 4. Desfase



Aun cuando en la actividad 2 se discutieron algunas características de las funciones sinusoidales, cuando la maestra preguntó qué nombre recibían las funciones que se habían estado graficando, ningún joven lo recordó. La maestra mostró que la manera de representar matemáticamente este tipo de funciones es: $y = A \cdot \text{sen}(\omega x + \phi_0) + B$, donde A es la amplitud, ω el período, ϕ_0 el desfase y B el desplazamiento vertical. Para calcular el período, convenientemente se eligió un intervalo en el eje de las abscisas de 0 a 6.28 unidades, es decir 2π aproximadamente. Los valores de los parámetros de la gráfica 3, fueron determinados por 2 de los 10 participantes. (Samantha y Carlos); a excepción del desfase, el resto de los jóvenes participantes, calcularon los valores de los parámetros restantes.

$$f(t) = 0.12\text{sen}(1.12 t - 0.46) + 0.47$$

Conclusiones

Con respecto a qué significados pueden construir los alumnos del nivel medio superior al establecer conexiones entre determinados fenómenos físicos periódicos y los parámetros de las representaciones gráficas de las funciones sinusoidales, concluimos que al representar gráficamente un fenómeno físico periódico como el péndulo, los

participantes lograron asociar significado a los parámetros que intervienen en él; si bien, dicho significado no es el institucional, de manera intuitiva y gracias a la observación directa del fenómeno, los estudiantes generan un significado aceptable en cuanto primer acercamiento de la periodicidad y la amplitud.

En relación con la periodicidad, los jóvenes desecharon y comprobaron la falsedad de ciertas ideas intuitivas como el que la masa del péndulo y el ángulo de oscilación influyen en la periodicidad. Los participantes identificaron que a mayor longitud mayor período y viceversa, y asociaron al período, como el tiempo que tarda el péndulo en una oscilación y a la periodicidad, con la sucesión de oscilaciones.

Los participantes establecieron referentes, lo que implicó que estaban comparando parámetros; cuando hablaron de la amplitud, la asociaron con la elongación, la cual físicamente se observa *desde una perspectiva horizontal, en la gráfica se representa de manera vertical*. (Samantha, 15 años).

Los estudiantes definieron el desfase vertical con referencia al eje de las abscisas, Diana mencionó que este concepto es *lo que la gráfica se aleja del eje x*.

Los jóvenes no asociaron significado al desfase o desplazamiento horizontal, este fue comprendido por algunos de los participantes cuando la maestra hace referencia a él; a pesar de que los jóvenes no tenían ningún acercamiento previo a la representación matemática de la función sinusoidal, cuando se presenta la estructura del modelo, los participantes que habían comprendido el desfase, lograron determinar el valor de los parámetros que en él intervienen.

Si bien, el objetivo de este experimento no fue el determinar los significados asociados al modelo matemático que representa a las funciones sinusoidales, éste parece ser un tema de exploración interesante, a realizar posteriormente, sobre todo en condiciones similares a las de esta investigación.

Para dar respuesta a la pregunta sobre que repercusión tiene en la construcción de significados de las funciones sinusoidales, el uso de ciertas herramientas digitales, es posible decir que dado el origen de las gráficas, las cuales estuvieron determinadas por el sensor, la distancia de éste al punto de equilibrio de la masa creó un desfase temporal en la gráfica generada, situación que los participantes no lograron asociara a la fase inicial del movimiento pendular; sin embargo, el uso de esta herramienta, así como el software, facilitaron la generación, la reproducción, pero sobretodo la discusión y el análisis de las representaciones gráficas del fenómeno periódico; por ejemplo, los

jóvenes constataron que las gráficas no son icónicas, o que la forma de la gráfica no depende de la rapidez con que oscile el péndulo o se camine frente al sensor.

En general, el sensor de movimiento así como el diseño y guía de la actividad fueron mediadores esenciales para eliminar algunas de las complejidades y dificultades que las gráficas tienen por sí mismas. La forma de generar las gráficas, permitió identificar y asignar significado a los signos o rasgos que representan los parámetros de las funciones sinusoidales, y cuando fue necesario modificar dichos parámetros, lo hicieron de una manera relativamente sencilla, ya que solo tenían que caminar frente al sensor o repetir el experimento del péndulo y comprobar si las predicciones o conjeturas que establecían eran ciertas o tenían que desecharlas.

Referencias

- Balacheff, N. (1990). Towards a Problématique for Research on Mathematics Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (258-272), 4. Francia.
- Moreno, L. (2014). *Educación Matemática: del signo al píxel*. Bucaramanga, Santander, Colombia: Universidad Industrial de Santander.
- Moore, K. (2010). The Role of Quantitative and Covariational Reasoning in Developing Precalculus Students' Image of Angle Measure and Central Concepts of Trigonometry. *Proceeding of the 13th Annual Conference of Research in Undergraduate Mathematics Education*. North Carolina: SIGMAA on RUME.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.
- Radford, L. (2009). "No ¡He starts walking backwards!: interpreting motion graphs and the question of space, place and distance". En *ZDM Mathematics Education*.
- Sierpinska, A. (1990). Some Remarks of Undersanding in Mathematics 10, págs. 24-36.