UN ESTUDIO COGNITIVO DE LOS CONCEPTOS DE VECTOR PROPIO Y VALOR PROPIO

Gisela Camacho Espinoza, Asuman Oktaç

DME CINVESTAV-IPN

gcamacho@cinvestav.mx, oktac@cinvestav.mx

Los conceptos de vector propio y valor propio forman parte del paquete básico de conocimientos de álgebra lineal que debe adquirir un estudiante de ciencias o ingeniería durante los primeros años de su formación. En este escrito se plantean las ideas principales de un anteproyecto de investigación de doctorado que propone analizar los conceptos de vector propio y valor propio en los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ *y* $\mathbf{R}^3$ *así como en espacios que no necesariamente pueden interpretarse geométricamente. Buscamos desarrollar un modelo de construcciones mentales (descomposición genética), a la luz de la teoría APOE, que pueda explicar cómo un individuo puede comprender dichos conceptos de manera eficaz. La geometría dinámica es considerada como un factor que puede contribuir en la construcción de las estructuras mentales necesarias para comprender los vectores y valores propios en espacios con representación geométrica y en espacios más abstractos.*

Palabras claves: Vector propio, valor propio, geometría dinámica, cognición, descomposición genética.

Introducción

Este documento está basado, casi en su totalidad, en el anteproyecto del mismo nombre elaborado durante los meses de mayo a octubre de 2014 para ingresar al programa de doctorado en Ciencias del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV. No pretende ser un documento exhaustivo y concluyente sobre el tema. Sin embargo, nos interesa mostrar parte de la revisión de literatura realizada así como las ideas principales respecto a la investigación sobre la cognición de los vectores y valores propios que proponemos.

El álgebra lineal forma parte de los planes y programas de estudios de diferentes carreras en diversas instituciones de nivel superior del país enfocadas a la ciencia y la tecnología. Sin embargo, se ha señalado que su estudio genera dificultades en la población estudiantil, provocando deserción, frustración y desconcierto (Dorier et al. 1997, Sierpinska et al. 1997, Hillel 1997, Dubinsky 1997, Carlson et al. 1993). Reacciones muy similares enfrentan los profesores al llevar estos contenidos al aula. Desde los años 60's el álgebra lineal se presentó como un curso formalizado, carente de intuición y geometría. En respuesta a la problemática surgida de cursos de este tipo, se realizaron investigaciones enfocadas en encontrar soluciones viables ante los obstáculos que se presentan en el quehacer escolar.

Los conceptos de vector propio (eigenvector) y valor propio (eigenvalor) son considerados, en los planes y programas de estudios de distintas ingenierías y de algunas carreras científicas, como conocimientos básicos en el álgebra lineal. Sin embargo, los estudiantes pocas veces cuentan con herramientas cognitivas fuertes que les permitan comprenderlos. Es por ello que se hace necesario continuar la búsqueda de elementos que permitan aprender mejor estos conceptos y que ayuden a los estudiantes a utilizarlos de manera consciente.

Los vectores propios y los valores propios en los libros de texto

Hasta ahora, una de las fuerzas principales que ha guiado la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha estado constituida por los libros de texto; mediante ellos se intenta transponer el conocimiento científico en conocimiento enseñable junto con la concepción de un método adecuado para ello.

Con el fin de conocer cómo se presentan los vectores propios y los valores propios en textos empleados en algunos cursos de Álgebra Lineal de la Facultad de Ciencias (FC-UNAM) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), se revisaron los libros de texto *Linear Algebra* de Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel y Lawrence E. Spence (2003); y *Álgebra Lineal* de Kenneth Hoffman y Ray Kunze (1999), de la bibliografía del temario del curso de Álgebra Lineal I de las carreras de matemáticas, actuaría y física (Facultad de Ciencias UNAM, 1983a). Asimismo se hizo una revisión de los libros de texto *Linear Algebra* de Serge Lang (2004) y *Álgebra Lineal* de Hugo Alberto Rincón (2001), de la bibliografía del temario de Álgebra Lineal II de la carrera de matemáticas (Facultad de Ciencias UNAM, 1983b). Los 4 libros presentan un enfoque similar respecto a los vectores y valores propios, por ello se hará referencia únicamente al texto *Linear Algebra* de Friedberg, et al. (2003).

En el capítulo 5 de este libro se explica el problema de diagonalización. Dos preguntas desencadenan un análisis profundo, riguroso y formal de los conceptos de vector propio y valor propio. Las preguntas que se relacionan con el operador lineal T y con un espacio vectorial V de dimensión finita son:

1. ¿Existe una base ordenada β para V tal que $[T]_\beta$ es una matriz diagonal?
2. Si tal base existe, ¿cómo puede encontrarse? (Friedberg et al. 2003, p. 244).

Los autores consideran que solucionar el problema de diagonalización conduce naturalmente a los conceptos de eigenvector y eigenvalor. Se proponen las siguientes definiciones.

> Definiciones. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V. Un vector no cero $v \in V$ es llamado *eigenvector* de T si existe un escalar λ tal que

$T(v) = \lambda v$. El escalar λ es llamado *eigenvalor* correspondiente al *eigenvector* v. (Friedberg et al. 2003, p. 246).

El planteamiento del libro de texto se centra en los aspectos computacionales con matrices que se formalizan a lo largo del capítulo. Aunque se utilizan ejemplos con espacios vectoriales como R^2 y R^3, no se presentan ilustraciones geométricas relacionadas con las transformaciones o con los conceptos de vector propio y valor propio. ¿Cómo influye la falta de representaciones geométricas de los conceptos de vector propio y valor propio, en los casos en que lo amerita, en el aprendizaje de estos conceptos? Algunos ejemplos de espacios vectoriales que pueden resultar más problemáticos en cuanto al aprendizaje de vectores y valores propios son R^n con $n > 3$, el espacio de los polinomios de grado n o el espacio de las matrices de $n \times n$, espacios que por su propia naturaleza no pueden representarse geométricamente.

Objetivo de la investigación

El objetivo principal de la investigación que proponemos es analizar con profundidad los conceptos de vector propio y valor propio en los espacios vectoriales $\boldsymbol{R}^2$ y $\boldsymbol{R}^3$ así como en espacios que no necesariamente pueden interpretarse o representarse geométricamente, con el fin de desarrollar un modelo de construcciones mentales (descomposición genética) que pueda explicar cómo un individuo puede comprender dichos conceptos de manera eficaz. También se busca determinar aquellos elementos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de los vectores y valores propios en $\boldsymbol{R}^2$ que permitan comprender de manera eficiente y consciente los conceptos en $\boldsymbol{R}^3$ y posteriormente a $\boldsymbol{R}^4$. Del mismo modo se investigarán los elementos que ayudan a su generalización en $\boldsymbol{R}^n$ y espacios vectoriales más abstractos de dimensión finita. Con base en la información obtenida se presentará un diseño de actividades que permitirá refinar el trabajo teórico y así realizar una propuesta sólida para el trabajo en el aula. Para guiar el cumplimiento del objetivo se plantean las siguientes preguntas:

¿Qué estructuras mentales son necesarias en la construcción de los conceptos de vector propio y valor propio en $\boldsymbol{R}^2$ y $\boldsymbol{R}^3$ y cómo se caracterizan?

¿Qué estructuras mentales previas relacionadas con otros conceptos matemáticos son necesarias para la construcción de las estructuras relacionadas con los conceptos de vector propio y valor propio en $\boldsymbol{R}^2$ y $\boldsymbol{R}^3$?

¿Qué estructuras mentales son necesarias en la construcción de los conceptos de vector propio y valor propio en espacios vectoriales que no necesariamente pueden representarse de manera geométrica y cómo se caracterizan?

¿Qué estructuras mentales previas relacionadas con otros conceptos matemáticos son necesarias para la construcción de las estructuras relacionadas con los conceptos de vector propio y valor propio en espacios vectoriales que no necesariamente pueden representarse de manera geométrica?

¿Qué dificultades enfrentan los estudiantes en la construcción de los conceptos vector propio y valor propio en cualquier espacio vectorial?

¿Qué efectos produce el uso de ambientes de geometría dinámica en la construcción de las estructuras mentales necesarias para la comprensión de los conceptos de vector propio y valor propio en $\boldsymbol{R}^2$ y $\boldsymbol{R}^3$?

¿De qué manera pueden incidir las construcciones mentales apoyadas en ambientes de geometría dinámica en la comprensión de los vectores propios y valores propios en espacios vectoriales más abstractos que $\boldsymbol{R}^2$ y $\boldsymbol{R}^3$?

¿Qué elementos cognitivos relacionados con el aprendizaje de los vectores y valores propios en $\boldsymbol{R}^2$ permiten la construcción de estos conceptos en $\boldsymbol{R}^3$ y qué características tienen los mecanismos mentales que permiten dicho tránsito?

¿Qué elementos cognitivos surgidos de la comprensión de los vectores propios en $\boldsymbol{R}^2$ y $\boldsymbol{R}^3$ pueden potenciar la generalización de los conceptos de vector propio y valor propio en el espacio $\boldsymbol{R}^n$ con $n > 3$?

Mediante las respuestas obtenidas buscaremos posibles relaciones entre la construcción de estructuras mentales y el uso de ambientes de geometría dinámica. Existen investigaciones que han abordado problemáticas del álgebra lineal apoyándose en el uso de geometría dinámica y particularmente sobre los conceptos que nos interesan como Soto y García (2002) y Gol Tabaghi (2012), más adelante se hablará sobre ellos. Buscamos caracterizar las construcciones mentales y caracterizar el papel de la geometría dinámica en los mecanismos que conducen a dichas construcciones y los procesos de generalización.

Por otra parte, en las preguntas de investigación se plantean de manera separada las cuestiones relacionadas con los espacios vectoriales $\boldsymbol{R}^2$ y $\boldsymbol{R}^3$ y las cuestiones relacionadas con los espacios vectoriales más generales. Esto se debe a que en primera instancia, se pretende caracterizar los elementos cognitivos necesarios para la comprensión del concepto en espacios en los que la visualización puede ser un apoyo importante; posteriormente se realizará un análisis respecto a las posibles relaciones entre la construcción de estructuras mentales surgidas a partir del entendimiento geométrico y la construcción de dichas estructuras en espacios vectoriales más abstractos.

Investigaciones relacionadas con los conceptos de vector propio y valor propio

Existen algunas investigaciones previas relacionadas con la cognición de los vectores y valores propios. Una de tales investigaciones es la realizada por Klasa (2010). La autora se centró en la elaboración de diseños pedagógicos para abordar los temas de transformaciones lineales, vectores propios, formas cuadráticas, cónicas con cambio de base y valores singulares. Propuso que para construir un escenario pedagógico adecuado, podría ser utilizada la teoría APOE, acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema, desarrollada inicialmente por Dubinsky (Arnon et al. 2014), diseñando una descomposición genética de los conceptos del álgebra lineal (Klasa, 2010). Sin embargo, en su reporte no se presentaron descomposiciones genéticas.

En dicha investigación, utilizando el programa Maple se mostró a algunos estudiantes la animación de un vector v que se movía sobre un círculo y su imagen $T(v)$ bajo alguna transformación lineal. Se les pidió que observaran si en algún momento los dos vectores, v y $T(v)$, eran colineales. Con el programa Cabri, los estudiantes podían repetir animaciones del mismo tipo de manera más fácil. Podían mover el vector v y detenerlo en el momento preciso en el que observaran que sucedía la colinealidad buscada. Podían medir los vectores v y $T(v)$ y así encontrar el eigenvalor asociado.

Otro trabajo relacionado con la enseñanza y aprendizaje de eigenvectores y eigenvalores es el de Gol Tabaghi (2012). Propuso un estudio del desarrollo de las percepciones explícitas de los conceptos de eigenvector y eigenvalor a través del uso de la geometría dinámica en 2 dimensiones y bajo la teoría de la conciencia de Mason. Se enfocó en el efecto del uso de las representaciones con geometría dinámica en las conceptualizaciones de eigenvector y eigenvalor. El software utilizado fue *The Geometer's Sketchpad.* La investigadora observó que las interacciones dinámicas promovieron cambios en las concepciones de los estudiantes respecto a los conceptos de eigenvector y eigenvalor. La autora concluyó que las representaciones geométricas no sólo ayudaron a los estudiantes a visualizar los conceptos de eigenvector y eigenvalor, sino que refinaron su conciencia explícita permitiendo una asimilación más rica de los conceptos.

Otro trabajo vinculado con la enseñanza y el aprendizaje de los vectores y valores propios es el de Soto y García (2002), quienes plantearon una exploración gráfica de vectores y valores propios en $\boldsymbol{R}^2$ y $\boldsymbol{R}^3$, mediante el programa Cabri Geometry II. Sus fundamentos teóricos fueron los registros de representaciones semióticas de Duval así como los trabajos de Sierpinska. Los investigadores plantean que aunque es posible encontrar los valores y vectores propios de una transformación lineal partiendo de la definición formal dada por los libros de texto, los estudiantes cometen errores que están relacionados con los significados limitados de los símbolos y conceptos que se ocupan.

Otra investigación es la de Larson, Zandieh y Rasmussen (2008). En ella los investigadores plantan un diseño de enseñanza compatible con la Teoría de Modelos y Modelación de Lesh & Doerr (2003) y con la Teoría de Educación Matemática Realista. Los autores discutieron cómo emergieron en los estudiantes las ideas que relacionan el determinante de una matriz, la dependencia de sus vectores columna y los valores y vectores propios. Para ello plantearon el problema de medir el área de la imagen de un cuadrado unitario bajo la multiplicación de una matriz de 2×2.

Un alumno participante de la experiencia de enseñanza explicó que, por medio del determinante es posible conocer el área del paralelogramo que se puede formar a partir de dos vectores dados. De este modo, si el determinante es cero, los vectores son colineales. Con base en ese razonamiento los autores afirmaron que sería más intuitivo para los estudiantes pensar los vectores propios como vectores cuyas imágenes, bajo una multiplicación por una matriz, caen en la misma línea que el vector original. Además, estos vectores se encuentran haciendo el determinante igual a 0 (Larson et. al, 2008).

La investigación anteriormente descrita precedió al trabajo de Larson et. al., 2007, en el que se buscó el surgimiento natural de los conceptos de vector propio, valor propio y espacio propio a través de la perspectiva de modelación y modelos. En esta investigación se presentó un problema de modelación relacionado con la distribución de autos en 3 sucursales de un negocio de renta de automóviles. Sin embargo, los estudiantes propusieron soluciones relacionadas con matrices de coeficientes y cadenas de Markov, sistemas de ecuaciones lineales e interpretación de redistrubución estadística como razón de cambio. Los autores señalaron que una manera de aprovechar la actividad de enseñanza podría ser una discusión previa dirigida hacia la predicción del comportamiento de un sistema a largo plazo. Así, se podría potenciar el pensamiento de los estudiantes hacia los conceptos de vector propio, valor propio y espacio propio.

Otra investigación vinculada con la cognición de los vectores y valores propios, es la reportada en Salgado y Trigueros (2014) y en Salgado y Trigueros (2015). En su artículo del año 2015, las investigadoras analizaron la manera en que un grupo de 30 estudiantes de la licenciatura en Economía aprendieron los conceptos de valor propio, vector propio y espacio propio. Las investigadoras combinaron dos marcos teóricos en su investigación, la teoría APOE y la aproximación Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003). Para ello utilizaron un problema de modelación en un contexto realista así como actividades basadas en una descomposición genética que elaboraron con anticipación. Con el apoyo de la teoría APOE, analizaron las construcciones mentales que utilizaron los estudiantes así como la manera en que éstas se relacionaron con la introducción de nuevo conocimiento. (Salgado y Trigueros, 2015).

En este estudio se consideró la geometría de los conceptos vector propio, valor propio y espacio propio. En la descomposición genética que se planteó tomaron en cuenta acciones ejecutadas en contextos geométricos, así como coordinaciones entre procesos algebraicos y procesos de reconocimiento geométrico de las propiedades de los conceptos estudiados. Los estudiantes trabajaron y reflexionaron sobre actividades diseñadas para tratar aspectos geométricos de los valores propios en $\boldsymbol{R}^2$ y compararon los resultados obtenidos con actividades algebraicas. También trabajaron con $\boldsymbol{R}^3$ y posteriormente hicieron generalizaciones a $\boldsymbol{R}^n$. Las investigadoras señalaron que después de trabajar con varias actividades empleando representaciones geométricas, los estudiantes lograron reconstruir la definición algebraica $Av = \lambda v$. Las investigadoras mencionaron que 26 estudiantes construyeron relaciones claras entre las representaciones geométricas y algebraicas de los valores propios y los vectores propios, y mostraron por lo menos una concepción proceso. Tres de ellos mostraron concepción objeto. (Salgado y Trigueros, 2015). Por otra parte, las investigadoras señalaron que la mayor parte de los estudiantes que participaron en su investigación tuvieron problemas cuando los valores propios fueron números complejos. (Salgado y Trigueros, 2014).

Marco teórico y aspectos metodológicos

La investigación que proponemos se realizará desde la perspectiva de la Teoría APOE, la cual proporciona un modelo cognitivo para describir cómo pueden ser aprendidos los conceptos matemáticos (Arnon et al., 2014). A continuación se describe brevemente la Teoría y la manera en que se utilizará en la investigación.

Las raíces de la Teoría APOE están en los trabajos de Piaget. Puede considerarse como una interpretación de Dubinsky, en un principio, de la abstracción reflexiva aplicada al pensamiento matemático avanzado. La abstracción reflexiva es el principal mecanismo que permite las construcciones mentales así como las estructuras lógico matemáticas en el desarrollo del pensamiento (Arnon et al., 2014). La Teoría APOE considera 4 tipos de estructuras mentales o concepciones: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas. También tiene en cuenta 5 tipos de abstracción reflexiva o mecanismos mentales que permiten pasar de una estructura a otra: interiorización, encapsulación, coordinación, reversión y tematización.

Una Acción es una transformación que ejecuta un individuo de manera externa sobre un objeto cognitivo existente para él. Es externa porque cada paso de la transformación tiene que ser ejecutado en determinado orden, además de que necesita ser guiada por instrucciones externas (Arnon et al., 2014). Cuando una Acción se repite y se reflexiona sobre la repetición de modo que el individuo ya no depende de estímulos externos para ejecutarla, la Acción se convierte en un Proceso. Los pasos de la acción se pueden imaginar sin necesidad de ser ejecutados de manera explícita. La concepción Proceso se puede lograr por medio del mecanismo de interiorización. "La interiorización permite ser consciente de una acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras acciones" (Dubinsky, 1991, p. 107. Citado en Arnon et al., 2014).

Cuando un individuo aplica una Acción a un Proceso el Proceso se vuelve un Objeto por medio del mecanismo de encapsulación. Así, el individuo se vuelve consciente del proceso como una totalidad y de que puede ejecutar acciones sobre ella. De este modo el Proceso se encapsula en un Objeto cognitivo (Dubinsky et al. 2005, citado en Arnon et al., 2014).

Un Objeto puede ser desencapsulado para regresar al proceso que le dio origen. Otra manera de construir procesos mentales consiste en la coordinación de dos procesos existentes. Esto genera un nuevo proceso que se puede encapsular para construir un Objeto. Los Procesos también pueden revertirse para construir nuevos procesos que permiten construir otros Objetos. (Arnon et al., 2014). Un Esquema de un concepto matemático está formado por una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas relacionados entre sí. No es una estructura terminada, se reconstruye constantemente según la actividad matemática del individuo. Un Esquema es coherente cuando el individuo es capaz de determinar si puede usarlo o no para resolver determinadas situaciones problemáticas. El Esquema se vuelve un Objeto mental por medio del mecanismo de tematización que permite aplicarle Acciones (Arnon et al., 2014, p. 25). Por otra parte, considerando las estructuras mentales y los mecanismos se puede elaborar un modelo teórico hipotético para describir cómo un individuo puede aprender un concepto matemático. Este modelo debe validarse mediante datos empíricos para considerarse como una descomposición genética. Cabe mencionar que la descomposición genética no es única, ya que pueden existir diferentes maneras de aprender el mismo concepto.

La Teoría APOE es considerada como un paradigma de investigación (Arnon et al., 2014, p. 93). Está integrado por tres componentes que forman un ciclo: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y recolección y análisis de datos. La investigación inicia con el análisis teórico, de donde surge la descomposición genética preliminar. El análisis teórico permite el diseño e implementación de la enseñanza que fomentará las construcciones mentales sugeridas por la descomposición genética mediante actividades y ejercicios. La implementación de la enseñanza da la oportunidad de recolectar datos para analizarlos, con el fin de identificar si los estudiantes realizan las construcciones mentales pedidas en la descomposición genética y conocer la eficacia del aprendizaje. "El ciclo [de investigación] continúa hasta que la evidencia empírica y el análisis teórico apuntan hacia las mismas construcciones mentales". (Arnon et al., 2014, p. 94).

Respecto al tema de investigación propuesto, del análisis teórico se derivará la descomposición genética que permitirá el diseño de actividades y su implementación a través de la enseñanza en el aula. Dicho análisis consistirá de una revisión detallada de algunos libros de texto de las bibliografías básicas de los temarios de Álgebra Lineal I y Álgebra Lineal II de la Facultad de FC-UNAM. Se realizará una revisión detallada de las investigaciones previas elaboradas desde el punto de vista de la Teoría APOE que tratan con otros conceptos del álgebra lineal que intervienen en la construcción de los conceptos vector propio y valor propio. Se observarán cursos de Álgebra Lineal en la FC-UNAM con la finalidad de considerar las nociones que los profesores llevan al aula.

Los trabajos relacionados con la cognición de los valores propios y los vectores propios son pocos. Algunas de las investigaciones revisadas incluían como elemento primordial el uso de tecnología, particularmente, el uso de ambientes de geometría dinámica. Estos estudios fueron de tipo exploratorio y en los espacios vectoriales $\boldsymbol{R}^2$ o $\boldsymbol{R}^3$. Segú esos trabajos, las representaciones geométricas de los vectores propios y valores propios en estos espacios vectoriales pueden ayudar a la construcción sólida de estos conceptos. Buscamos profundizar en el estudio de las relaciones entre la cognición de vectores y valores propios en espacios que pueden representarse geométricamente como $\boldsymbol{R}^2$ o $\boldsymbol{R}^3$ y la cognición de estos conceptos en espacios vectoriales más abstractos. Particularmente nos interesa caracterizar la transición de la cognición de los conceptos en $\boldsymbol{R}^2$ a $\boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{R}^3$ a $\boldsymbol{R}^4$, $\boldsymbol{R}^4$ a $\boldsymbol{R}^n$ y $\boldsymbol{R}^n$ a espacios vectoriales más abstractos de dimensión finita.

Las representaciones geométricas y dinámicas en $\boldsymbol{R}^2$ y $\boldsymbol{R}^3$ pueden proporcionar a los estudiantes la intuición necesaria para evitar el obstáculo del formalismo; este aspecto ha sido documentado en relación con otros conceptos de álgebra lineal (Sierpinska et al., 1999). Se considerará una articulación de marcos teóricos que permita la introducción de herramientas tecnológicas, como el software Geogebra, para enriquecer los procesos de construcción de estructuras mentales y analizar su eficacia para generar otras que permitan la comprensión de los vectores y valores propios en espacios vectoriales más abstractos. El marco teórico de apoyo se determinará y argumentará durante el primer año del desarrollo de la investigación.

Se elaborarán un cuestionario y una entrevista semiestructurada apoyados en el software Geogebra que permitirán realizar una primera evaluación de la descomposición genética preliminar. Las preguntas de la entrevista se elaborarán según los resultados obtenidos en los cuestionarios. Las justificaciones teóricas pertinentes que sustentarán la introducción de elementos tecnológicos en la investigación se determinarán con lecturas que se están realizando. Después del análisis de lo hasta aquí descrito, se determinará la viabilidad de la descomposición genética inicial y se realizarán los ajustes pertinentes. Como resultado se propondrán sugerencias para implementarse en el aula.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education. Nueva York: Springer.

Carlson, D., Johnson, C., Lay, D., Porter, A. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study
Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. *The College Mathematics Journal*, *24*(1), 41-46.

Dorier, J.L., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski, M. (1997) L'Algèbre linéaire: l'obstacle du formalism á travers diverses recherches de 1987 a 1995. En J-L. Dorier J.-L.(Ed.), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp. 105-147) La Pensée Sauvage Éditions.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, The Neatherlans: Kluwer.

Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course. En D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, and W. Watkins (Eds.) *Resources For Teaching Linear Algebra* (pp. 85-106), MAA Notes, 42.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335–359.

Facultad de Ciencias UNAM, (1983 a). *Programa de estudios de la asignatura de Álgebra Lineal I de la carrera de matemáticas.* Recuperado de: http://www.fciencias.unam.mx/asignaturas/5.pdf

Facultad de Ciencias UNAM, (1983 b). *Programa de estudios de la asignatura de Álgebra Lineal II de la carrera de matemáticas.* Recuperado de: http://www.fciencias.unam.mx/asignaturas/6.pdf

Friedberg, S., Insel, A. y Lawrence, S. (2003). Linear Algebra. Nueva Jersey: Prentice Hall.

Gol Tabaghi, S. (2012). *Using Dynamic Geometry to Explore Linear Algebra Concepts: the Emergence of Mobile, Visual Thinking* (Tesis de doctorado no publicada). Simon Fraser University, Canadá.

Hillel, J. (1997). Des niveaux de description et du problème de la representation en algèbre linéaire. En J-L. Dorier J.-L. (Coord.), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, La Pensée Sauvage Éditions, 231-247.

Hoffman, K. y Kunze, R. (1999). *Álgebra Lineal*. México: Pearson.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear Algebra and its Applications,* 432, 2100-2111.

Lang, S. (2004). Linear Algebra. Neva York: Springer-Verlag.

Larson, C., Zandieh, M. y Rasmussen, C. (2008). A trip through eigenland: where most roads lead to the direction associated with the largest eigenvalue. 11th annual conference on RUME.

Larson, Rasmussen, Zandieh, Smith & Nelipovich (207). Modeling perspectives in linear algebra: a look at eigen-thinking. Annual conference on RUME.

Lesh, R., y Doerr, H.M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. En R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Rincón, H. (2001). Álgebra Lineal. México: Las prensas de Ciencias.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. *Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100-120.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación Matemática*, 26(3), 75-107.

Sierpinska, A., Defence, A., Khatcherian, T., y Saldanha, L. (1997). A propos de trois modes de raisonnement en álgebre linéaire. En J-L. Dorier J.-L.(Coord.), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp. 249-268), La Pensée Sauvage Éditions.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. y Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: The case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 7-40.

Soto, J. L. y García, M. (2002). A graphical exploration of the concepts of eigenvalue and eigenvectors in R^2 y R^3. *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergradaute level.* Recuperado de: http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/reportes/pdf/reporte10.pdf.