Guion Notación Científica.

Jesús Alfonso Riestra Velázquez   Yazmin Castañeda Segura   Ingrid Trinidad Calderón Rubio

Esta versión incluye, desde luego, la exposición del profesor, pero también un cuestionario que los estudiantes van a ir respondiendo a lo largo de la exposición. En el anexo se incluyen las actividades adicionales.

Primera clase

1. Expansión decimal de un número.

1.23 es un número decimal cuyo significado vamos a precisar:

Lectura de 1.23:	“una unidad, dos décimas y tres centésimas”,
en realidad:	“una unidad ***y*** dos décimas ***y*** tres centésimas”.
Significa:	“una unidad ***más*** dos décimas ***más*** tres centésimas”.
O sea:	“una unidad + dos décimas + tres centésimas”.
Es decir, 1.23 es igual a:	“1 unidad + (2 veces una décima) + (3 veces una centésima)”.

Pero ¿qué quiere decir *una décima* (o un décimo)?

1) Es un número fraccionario, esto es, una fracción de la unidad.
2) Más precisamente, es la fracción decimal que se obtiene al dividir la unidad en 10 partes iguales. Cada una de esas partes recibe el nombre de décimo.
3) Un décimo es la *décima* parte de la unidad y se representa con: $\frac{1}{10}$ (léase “un décimo”).

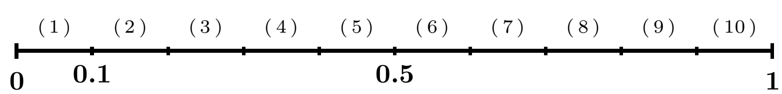


Fig. 1: En la recta numérica se ha dividido la unidad en 10 partes iguales, representando a 0.1 y 0.5.

¿Qué quiere decir *una centésima* (o un centésimo)?

Es un número fraccionario que se obtiene dividiendo una décima (parte) de la unidad en diez partes iguales, cada una de ellas se llama *centésimo* y se representa con: $\frac{1}{100}$ (léase “un centésimo”).

¿Cómo está eso de que un centésimo es un décimo de un décimo? ¡Barájenmelo más despacio!

¿Por qué se plantea un centésimo como resultado de la división en 10 partes iguales de un décimo? Esto es, que *un centésimo es una décima parte de un décimo*. Para ver esto, consideremos un ejemplo.

Ejemplo: *“Dividiendo a la súper torta”.* Imaginemos una torta que mide cerca de 20 metros, como se ilustra en la figura 2.

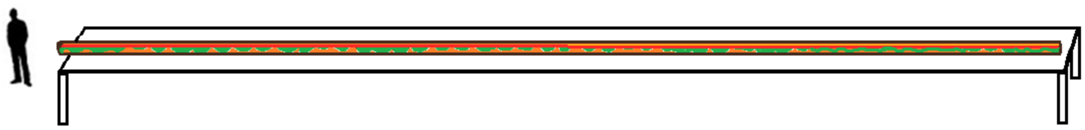


Fig. 2: La *"súper torta"*.

La vamos a repartir entre los invitados (y uno que otro "gorrón"). Para ser prácticos, primero la dividimos en 10 partes iguales. Pero cada décimo de la *"súper torta"* resulta demasiado grande, así que se vuelve a dividir cada décimo en 10 partes iguales (ver figura 3).

Fig. 3: La "*súper torta*" se divide en 10 partes iguales y cada una se vuelve a dividir a su vez en 10 partes.

¿Cuántas porciones *pequeñas* se obtienen? O sea: ¿cuántos décimos de décima (de súper torta) se obtienen? ... ¡Ah, pues por eso se llaman *centésimos*! A propósito ¿Qué es una *milésima*?

Ahora sí vamos a ser más convencionales pensando que la unidad en la recta numérica es 1 metro y que tenemos un objeto que va a resultar que mide 1.23m, pero que al comienzo del proceso de medir no lo sabemos. Por cierto ¿cómo se lee 1.23m? (la respuesta no es exactamente 1 *unidad* y 2 *décimas* y 3 *centésimas*, aunque la respuesta correcta es algo muy parecido).

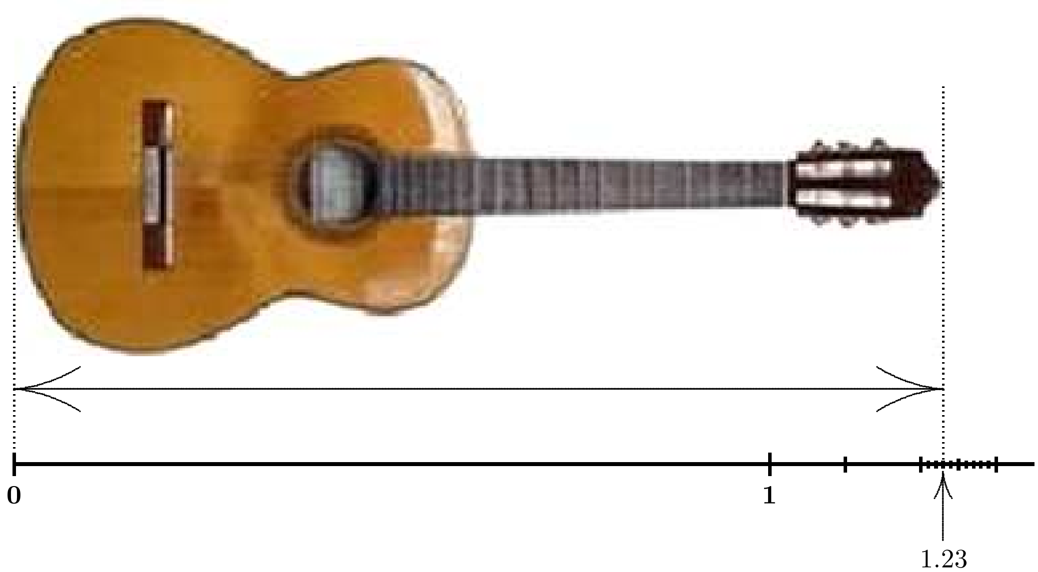


Fig. 4:

La recta numérica, como se sabe, sólo tiene marcado el origen y la unidad. Observamos que el objeto se pasa de la unidad, pero no llega a 2 unidades, así que dividimos la segunda unidad en 10 partes iguales (siendo cada una un *decímetro*). Vemos que el exceso sobre el metro se pasa de 2 decímetros (mide más que 1 metro y 2 decímetros) pero no llega a 3 decímetros (mide menos que 1 metro y 3 decímetros), por lo que el tercer decímetro después de la unidad se divide a su vez en 10 partes iguales (siendo cada una un *centímetro*). Todavía hay que agregar 3 centímetros más, para finalmente llegar a que la medida del objeto es de 1.23 metros (o sea, 1 metro y 2 decímetros y 3 centímetros). Obsérvese que en este caso las décimas de unidad son los *decímetros* y las centésimas de unidad son los *centímetros*.

¿Qué aprendimos de la medición anterior? Que medir con la *recta numérica o eje real* es distinto a medir con una cinta métrica (graduada en centímetros) con la cual probablemente hubiéramos medido el largo del objeto como 1 metro con 23 centímetros. En cambio, en la recta numérica que inicialmente sólo tiene marcado el origen (cero) y la unidad, la filosofía es que las otras marcas se van haciendo según se van necesitando.

Por ejemplo, si la magnitud a medir mide varias unidades, la unidad dada se sigue reproduciendo hacia la derecha de la ya existente poniendo marcas en dos unidades, tres unidades, etcétera, según se requiera. Ahora bien, si un número entero de unidades no alcanza a cubrir el objeto medido y una unidad más ya se pasa, es necesario dividir en 10 partes iguales la unidad siguiente y tomar el mayor número de décimas adicionales, etcétera.

En nuestro ejemplo, no se requirió reproducir la unidad, bastó una de ellas (pues dos excedían al objeto), pero sí hubo que tomar décimas de la segunda unidad: se agregaron 2 décimas a la unidad (pues agregar 3 excedía al objeto) y finalmente se requirió dividir en 10 la tercera décima, agregando exactamente 3 décimas de las décimas, es decir, 3 centésimas, lo que concluyó la medición.

Continuemos ahora con la expansión decimal del número 1.23. Nos quedamos en que 1.23 es una unidad + dos décimos + tres centésimos, o sea, "1.23 es igual a 1 unidad + (2 veces un décimo) + (3 veces un centésimo)". Que traducido a números queda:

$$1.23 = 1 + 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$$

La expresión del lado derecho se llama la *expansión decimal* de 1.23. La expansión decimal de 1.23 también puede expresarse:

$$1.23 = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} \quad \text{(Léase: 1 unidad + 2 décimos + 3 centésimos)}$$

porque $2 \times \frac{1}{10}$ es dos veces un décimo, o sea:

$$2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{(1+1)}{10} = \frac{2}{10}$$

y similarmente

$$3 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{(1+1+1)}{100} = \frac{3}{100}$$

Esta es la justificación de que, para multiplicar un entero, digamos 3, por un decimal, a saber $\frac{1}{100}$, multiplicamos el entero por el numerador del decimal dejando el mismo denominador:

$$3 \times \frac{1}{100} = \frac{(3 \times 1)}{100} = \frac{3}{100}$$

Pero desde luego, $\frac{3}{100}$ se lee "tres centésimas".

Pensemos ahora en el número 123.4:

Se lee como:	"una centena, dos decenas, tres unidades y cuatro décimos",
en realidad:	"una centena ***y*** dos decenas ***y*** tres unidades ***y*** cuatro décimos".
Significa:	"una centena ***más*** dos decenas ***más*** tres unidades ***más*** cuatro décimos"..
O sea:	"una centena **+** dos decenas **+** tres unidades **+** cuatro décimos".

Es decir, 123.4 es igual a:

"(1 vez una centena) + (2 veces una decena) + (3 veces una unidad) + (4 veces un décimo)"

cuya expansión decimal queda:

$$123.4 = 1 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10}$$

[Los alumnos deben responder la Hoja 1 de los ejercicios.]

Segunda clase

2. Multiplicación y división por 10.

Multiplicar por 10 es muy fácil en el sistema decimal, como también lo es dividir entre 10. Pero se trata de **razonarlo**.

2.1 *Multiplicación por 10.*

Queremos realizar ciertas operaciones mentalmente. Si lo que necesitamos es multiplicar un número por el producto indicado de dos factores, esto se puede realizar de dos maneras:

i) multiplicando el número por el primer factor y lo que resulte por el segundo,
ii) multiplicando el número por el segundo factor y lo que resulte por el primero.

Y de estas dos posibilidades escogemos la que nos convenga más. Veamos el siguiente ejemplo:

> *Juan salió de vacaciones y dejó su auto en el estacionamiento del aeropuerto de la Ciudad de México desde el lunes hasta el viernes, es decir, durante 5 días. ¿Cuántos minutos permaneció el auto estacionado?*

Sabemos que cada día tiene 24 horas y cada hora tiene 60 minutos. Para resolver nuestro problema tenemos que multiplicar:

$$5 \times 24 \times 60$$

Las dos posibilidades que tenemos para realizar esta multiplicación son:

$$5 \times (24 \times 60) = \begin{cases} (5 \times 24) \times 60 = 120 \times 60 = 7200 \\ 24 \times (5 \times 60) = 24 \times 300 = 7200 \end{cases}$$

¿Cuál consideras que es la más fácil de realizar mentalmente? Las dos maneras están bien y podemos elegir la que nos guste más o la que nos convenga. Hemos calculado entonces que el auto permaneció 7200 minutos en el estacionamiento.

Entremos entonces en materia. Conviene tener en mente la filosofía del sistema decimal, a saber, en la parte entera, se procede agrupando las unidades de 10 en 10. Así 10 unidades forman una *decena*, 10 decenas forman una *centena* (o 100 unidades), 10 centenas forman un *millar* (o 1000 unidades), etcétera.

Ejemplo: $1342 =$ 1 millar, 3 centenas, 4 decenas y 2 unidades, cuya expansión decimal nos queda:

$$1342 = 1 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 2 \times 1$$

Ahora bien, en la parte decimal se procede a la inversa, se dividen las unidades de 10 en 10. Recordemos que, al dividir una unidad en 10 partes iguales, cada una de estas partes es un décimo, o $\frac{1}{10}$, o sea, un décimo es la décima parte de una unidad. Si hacemos lo mismo con un décimo, es decir, lo dividimos en 10 partes iguales, cada una de estas partes es un centésimo, o $\frac{1}{100}$, o sea, un centésimo es la décima parte de un décimo. Si un centésimo lo dividimos en 10 partes iguales, cada una de estas partes es un milésimo, o $\frac{1}{1000}$, o sea, un milésimo es la décima parte de un centésimo, etcétera.

Ejemplo: $8.739 =$ 8 unidades, 7 décimas, 3 centésimas y 9 milésimas, cuya expansión decimal nos queda:

$$8 \times 1 + 7 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 9 \times \frac{1}{1000}$$

Vamos entonces a multiplicar números decimales por 10.

Ejemplo A. Consideremos la multiplicación 10×5.27. Empecemos con la expansión decimal de 5.27:

$$5.27 = 5 \times 1 + 2 \times \frac{1}{10} + 7 \times \frac{1}{100}$$

Vamos entonces a multiplicar este número por 10:

$$10 \times 5.27 = 10 \times \left(5 \times 1 + 2 \times \frac{1}{10} + 7 \times \frac{1}{100}\right)$$

Aplicamos la ley distributiva y obtenemos que:

$$10 \times \left(5 \times 1 + 2 \times \frac{1}{10} + 7 \times \frac{1}{100}\right) = 10 \times (5 \times 1) + 10 \times \left(2 \times \frac{1}{10}\right) + 10 \times \left(7 \times \frac{1}{100}\right)$$

Y como vimos antes, cuando tenemos que multiplicar un número por un producto indicado, podemos elegir cómo agruparlos, es decir, por cuál de los dos factores nos conviene multiplicar primero:

$$10 \times 5.27 = 10 \times (5 \times 1) + 10 \times \left(2 \times \frac{1}{10}\right) + 10 \times \left(7 \times \frac{1}{100}\right)$$

En estas multiplicaciones nos conviene siempre elegir el segundo factor, de tal forma que vamos a conseguir conservar los mismos dígitos del número, multiplicados ahora por el producto del 10 y el segundo factor (el que nos dice si el dígito representa, por ejemplo, decenas, unidades, décimos, etc.)

$$10 \times 5.27 = 5 \times (10 \times 1) + 2 \times \left(10 \times \frac{1}{10}\right) + 7 \times \left(10 \times \frac{1}{100}\right)$$

Donde:

- ♦ $5 \times (10 \times 1) = 5 \times 10$, ya que $10 \times 1 = 10$ (10 unidades es una decena)
- ♦ $2 \times \left(10 \times \frac{1}{10}\right) = 2 \times 1$, ya que $10 \times \frac{1}{10} = 1$ (10 décimos forman 1 unidad)
- ♦ $7 \times \left(10 \times \frac{1}{100}\right) = 7 \times \frac{1}{10}$, ya que $10 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$ (10 centésimos forman un décimo)

Tenemos entonces que:

$$10 \times 5.27 = 5 \times 10 + 2 \times 1 + 7 \times \frac{1}{10}$$

Lo que podemos leer como: 5 decenas y 2 unidades y 7 décimos, o sea, 52.7; luego:

$$10 \times 5.27 = 52.7$$

> ***Obsérvese que al multiplicar por 10, el efecto neto es recorrer el punto decimal un lugar a la derecha, como probablemente ya sabíamos, pero seguramente no entendíamos por qué.***

Ejemplo B. Multipliquemos ahora 10×0.46. Igual que en el ejercicio anterior escribimos 0.46 en su expansión decimal, a saber:

$$0.46 = 0 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10} + 6 \times \frac{1}{100}$$

De esta manera, al multiplicar por 10:

$$\begin{aligned} 10 \times 0.46 &= 10 \times \left(0 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10} + 6 \times \frac{1}{100}\right) \\ &= 10 \times (0 \times 1) + 10 \times \left(4 \times \frac{1}{10}\right) + 10 \times \left(6 \times \frac{1}{100}\right) \\ &= 0 \times (10 \times 1) + 4 \times \left(10 \times \frac{1}{10}\right) + 6 \times \left(10 \times \frac{1}{100}\right) \end{aligned}$$

Donde:

- ♦ $0 \times (10 \times 1) = 0 \times 10$
- ♦ $4 \times \left(10 \times \frac{1}{10}\right) = 4 \times 1$, ya que $10 \times \frac{1}{10} = 1$ (10 décimos forman una unidad)
- ♦ $6 \times \left(10 \times \frac{1}{100}\right) = 6 \times \frac{1}{10}$, ya que $10 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$ (10 centésimos forman un décimo)

Finalmente:

$$10 \times 0.46 = 0 \times 10 + 4 \times 1 + 6 \times \frac{1}{10}$$

que se lee:

0 decenas y 4 unidades y 6 décimos, o sea, 4 unidades y 6 décimos

¿0 decenas? Bueno, tanto en matemáticas como en física en vez de decir que no hay cierta cantidad se dice que hay cero de la misma: cero kilogramos, cero metros, etcétera (¡aunque a veces también decimos que traemos cero pesos en la bolsa!). En este ejemplo tenemos "cero decenas", es decir, no hay decenas, entonces:

$$10 \times 0.46 = 4.6$$

> ***De nuevo, observemos que el efecto de multiplicar por 10 es que el punto decimal se recorre un lugar a la derecha.***

Ejemplo C. ¿Y si el número a multiplicar por 10 no tiene punto decimal? Multipliquemos por 10 el número 43, el cual leemos como: "4 decenas + 3 unidades" y su expansión decimal nos queda:

$$43 = 4 \times 10 + 3 \times 1$$

Entonces:

$$10 \times 43 = 10 \times (4 \times 10 + 3 \times 1) = 4 \times (10 \times 10) + 3 \times (10 \times 1) = 4 \times 100 + 3 \times 10$$

dado que $10 \times 10 = 100$ (10 decenas son una centena) y $10 \times 1 = 10$ (10 unidades son una decena).

Así, tenemos que: $10 \times 43 = 4$ centenas y 3 decenas. ¿Y las unidades? ¡no hay unidades!

Podemos entonces decir que:

$$10 \times 43 = 4 \text{ centenas y } 3 \text{ decenas y } 0 \text{ unidades}$$

O sea:

$$10 \times 43 = 4 \times 100 + 3 \times 10 + 0 \times 1 = 430$$

Hagámoslo de otra manera. Con el mismo principio de que "0" indica que "no hay", podemos empezar por expresar el número 43 como 43.0 pues esto significa que tenemos 4 decenas, 3 unidades y 0 décimos; podría ser inclusive 43.00 pues también hay 0 centésimos. Luego:

$$10 \times 43.0 = 10 \times \left(4 \times 10 + 3 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10}\right) = 4 \times (10 \times 10) + 3 \times (10 \times 1) + 0 \times \left(10 \times \frac{1}{10}\right)$$

Y como 10 decenas forman una centena ($10 \times 10 = 100$), 10 unidades forman una decena ($10 \times 1 = 10$) y 10 décimos forman una unidad $\left(10 \times \frac{1}{10} = 1\right)$, tendremos que:

$$10 \times 43.0 = 4 \times (10 \times 10) + 3 \times (10 \times 1) + 0 \times \left(10 \times \frac{1}{10}\right) = 4 \times 100 + 3 \times 10 + 0 \times 1$$

Lo que leemos: 4 centenas, 3 decenas, 0 unidades. Entonces tenemos que:

$$10 \times 43.0 = 430$$

Si expresamos 43 como 43.00, al multiplicar por 10 obtenemos: $10 \times 43.00 = 430.0$.

Nuevamente observemos que el efecto de multiplicar por 10 es que el punto decimal se recorre un lugar a la derecha.

¿Qué hemos aprendido de todo lo anterior (multiplicación por 10)?

Cuando multiplicamos 8 centenas por 10, no multiplicamos el dígito 8 por 10 (obteniendo 80 centenas, lo cual, dicho de paso, sería correcto) sino que multiplicamos las centenas por diez, obteniendo millares. Así: 8 *centenas* por 10 nos da 8 *millares*. Esto es: el dígito 8 no cambia, sólo las centenas pasan a ser millares.

Es que ese es el modelo del sistema posicional decimal: Las unidades de cierta posición se agrupan de 10 en 10 formando unidades de la siguiente posición superior.

Similarmente, por ejemplo:

7 *decenas* por 10, obtenemos 7 *centenas* (y no 70 decenas),

5 *unidades* ordinarias por 10, dan 5 *decenas* (y no 50 unidades)

4 *décimas* por 10, dan 4 *unidades* (y no 40 décimas).

(Recordemos: multiplicamos décimas por 10, obteniendo unidades, puesto que 10 décimas dan una unidad, etcétera.)

Veamos el siguiente ejemplo: queremos multiplicar por 10 el número 875.43. Tenemos que:

$$\begin{array}{lll}(8 \text{ centenas} + 7 \text{ decenas} + 5 \text{ unidades} + 4 \text{ décimos} + 3 \text{ centésimos}) \times 10 & = & 875.43 \times 10 \\ 8 \text{ millares} + 7 \text{ centenas} + 5 \text{ decenas} + 4 \text{ unidades} + 3 \text{ décimos} & = & 8754.3\end{array}$$

Al multiplicar por 10, las centenas pasaron a ser millares, las decenas pasaron a ser centenas, las unidades pasaron a decenas, los décimos a unidades y los centésimos a décimos. Así, *al multiplicar por 10*, 8 centenas se convirtieron en 8 millares, 7 decenas se convirtieron en 7 centenas, 5 unidades en 5 decenas, 4 décimos en 4 unidades y 3 centésimos en 3 décimos.

El efecto neto de multiplicar por 10, desde luego, es dejar los mismos dígitos y recorrer el punto decimal un lugar a la derecha.

Caso especial. Queremos multiplicar el número 75 por 10. Tenemos que:

$$\begin{aligned} 75 \times 10 &= (7\,\text{decenas} + 5\,\text{unidades}) \times 10 \\ &= \ 7\,\text{centenas} + 5\,\text{decenas} + \ \boldsymbol{0\ unidades} \\ &= 750 \end{aligned}$$

Aquí fue necesario rellenar una posición inferior (la de las unidades ordinarias) con un cero. ¿Por qué? El cero sirve para posicionar el 7 en la tercera posición y al 5 en la segunda (contando de derecha a izquierda).

[Los alumnos deben resolver la Hoja 2 de los ejercicios.]

2.2 División por 10.

Dividir entre 10 es lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{10}$ (un décimo). Un décimo como factor de un número significa la décima parte del número. Así, por ejemplo:

- $\dfrac{1}{10} \times 10 = 1$ (la décima parte de una decena es una unidad),
- $\dfrac{1}{10} \times 1 = \dfrac{1}{10}$ (la décima parte de la unidad es un décimo),
- $\dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{100}$ (la décima parte de un décimo es un centésimo).

Ejemplo 2.2.1. Empecemos con la división: $98.7 \div 10$, o sea, $\dfrac{98.7}{10}$, que es lo mismo que multiplicar por $\dfrac{1}{10}$ el número 98.7 $\left(\textit{dividir entre 10 es lo mismo que multiplicar por } \dfrac{1}{10}\right)$, o sea:

$$98.7 \div 10 = \frac{1}{10} \times 98.7$$

Empecemos con la expansión decimal de 98.7. Tenemos que:

$$98.7 = 9 \times 10 + 8 \times 1 + 7 \times \frac{1}{10}$$

Luego, por la Ley Distributiva:

$$\begin{aligned}\frac{1}{10} \times 98.7 &= \frac{1}{10} \times \left(9 \times 10 + 8 \times 1 + 7 \times \frac{1}{10}\right)\\ &= \overbrace{\frac{1}{10} \times (9 \times 10)}^{9\times 1} + \overbrace{\left(\frac{1}{10} \times (8 \times 1)\right)}^{(8\times\frac{1}{10})} + \overbrace{\frac{1}{10} \times \left(7 \times \frac{1}{10}\right)}^{(7\times\frac{1}{100})}\end{aligned}$$

Pues:

- $\dfrac{1}{10} \times (9 \times 10) = 9 \times (\dfrac{1}{10} \times 10) = 9 \times 1$

  (ya que diez décimos es una unidad; el dígito "9" no cambia).

- $\dfrac{1}{10} \times (8 \times 1) = 8 \times (\dfrac{1}{10} \times 1) = 8 \times \dfrac{1}{10}$, ya que $\dfrac{1}{10} \times 1 = \dfrac{1}{10}$

  (multiplicar $\frac{1}{10}$ por la unidad es dividirla entre 10, lo que da un décimo).

♦ $\frac{1}{10}\times(7\times\frac{1}{10}) = 7\times(\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}) = 7\times\frac{1}{100}$, ya que $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$

(en efecto, $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$ es igual a $\frac{1}{10}\div 10$. o sea, es igual a un décimo dividido entre diez partes iguales que da un centésimo ¿por qué? [Recordar la súper torta]).

Finalmente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}\times 98.7 &= 9\times 1 + 8\times\frac{1}{10} + 7\times\frac{1}{100}\\ &= 9 \text{ unidades y } 8 \text{ décimos y } 7 \text{ centésimos}\\ &= 9.87\end{aligned}$$

Obsérvese que al dividir por 10, el efecto neto es recorrer el punto decimal un lugar a la izquierda.

Ejemplo 2.2.2. Veamos ahora la división

$$0.76\div 10 = \frac{0.76}{10} = \frac{1}{10}\times 0.76$$

Igual que en el ejercicio anterior escribimos 0.76 en su expansión decimal, a saber:

$$0.76 = 0\times 1 + 7\times\frac{1}{10} + 6\times\frac{1}{100}$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}\times 0.76 &= \frac{1}{10}\times\left(0\times 1 + 7\times\frac{1}{10} + 6\times\frac{1}{100}\right)\\ &= \overbrace{\frac{1}{10}\times(0\times 1)}^{0\times\frac{1}{10}} + \overbrace{\frac{1}{10}\times\left(7\times\frac{1}{10}\right)}^{7\times\frac{1}{100}} + \overbrace{\frac{1}{10}\times\left(6\times\frac{1}{100}\right)}^{6\times\frac{1}{1000}} \qquad \text{(por la Ley distributiva).}\end{aligned}$$

Pues:

♦ $\frac{1}{10}\times(0\times 1) = 0\times(\frac{1}{10}\times 1) = 0\times\frac{1}{10}$

♦ $\frac{1}{10}\times(7\times\frac{1}{10}) = 7\times(\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}) = 7\times\frac{1}{100}$, pues sabemos que: $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$

(la décima parte de un décimo es igual a un centésimo).

♦ $\frac{1}{10}\times(6\times\frac{1}{100}) = 6\times(\frac{1}{10}\times\frac{1}{100}) = 6\times\frac{1}{1000}$, ya que: $\frac{1}{10}\times\frac{1}{100}=\frac{1}{1000}$

(un décimo de un centésimo es igual a un milésimo).

Finalmente:
$$\frac{1}{10} \times 0.76 = 0 \times \frac{1}{10} + 7 \times \frac{1}{100} + 6 \times \frac{1}{1000}$$
(0 décimos y 7 centésimos y 6 milésimos = .076). Así:

$$\frac{1}{10} \times 0.76 = .076$$

Pero " .076 " (o sea, 0 décimos y 7 centésimos y 6 milésimos) conviene verlo como: 0.076 (esto es, como: 0 unidades y 0 décimos y 7 centésimos y 6 milésimos). De hecho:

$$.076 = 0.076 = 00.076 = 000.076 = \cdots$$

[En la parte entera los ceros a la extrema izquierda no valen; de ahí la frase "ese fulano es un cero a la izquierda"].

> ***De nuevo vemos que al dividir por 10, el punto decimal se recorre un lugar a la izquierda.***

Conviene recordar que en el sistema decimal, así como en la parte entera se procede agrupando las unidades de 10 en 10 (así 10 unidades forman una decena, 10 decenas forman una centena o 100 unidades, etcétera) en la parte decimal se procede a la inversa, fraccionando las unidades de 10 en 10. Después del punto decimal empezamos leyendo el dígito de las décimas (donde las décimas se obtienen fraccionando la unidad en diez partes iguales); sigue el dígito de las centésimas (donde las centésimas provienen de dividir a las décimas en diez partes iguales); luego sigue el dígito de las milésimas (donde las milésimas provienen de dividir a las centésimas en diez partes iguales), y así sucesivamente.

¿Qué hemos aprendido de todo lo anterior (división por 10)?

Cuando dividimos 8 centenas entre 10, no dividimos el dígito 8 entre 10, con lo que obtendríamos " $\frac{8}{10}$ *centenas*" (o sea, " 0.8 *centenas*", lo cual se ve rarísimo), sino que dividimos las centenas entre diez, obteniendo decenas. Así: *8 centenas entre 10 nos da 8 decenas.* El dígito 8 no cambia sólo las unidades (centenas que pasan a ser decenas).

> ***Es que ese es el modelo del sistema posicional decimal: las unidades de cierta posición se fraccionan de 10 en 10 formando unidades de la anterior posición inferior.***

Así, al dividir 6 decenas entre 10, se obtienen 6 unidades ordinarias. Y 5 unidades ordinarias divididas entre 10 pasan a ser 5 décimas. Veamos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{ll} (\text{8 centenas} + \text{6 decenas} + \text{5 unidades} + \text{4 décimos}) \div 10 & = 865.4 \div 10 \\ \text{8 decenas} + \text{6 unidades} + \text{5 décimos} + \text{4 centésimos} & = 86.54 \end{array}$$

Al dividir entre 10, las centenas pasaron a ser decenas, las decenas pasaron a unidades, las unidades a décimos y los décimos a centésimos. Así 8 centenas se convirtieron en 8 decenas, 6 decenas en 6 unidades, 5 unidades en 5 décimos y 4 décimos en 4 centésimos.

El efecto neto, desde luego, es dejar los mismos dígitos y recorrer el punto decimal un lugar a la izquierda.

Caso especial. Queremos dividir el número .75 por 10. Tenemos que:

$$\begin{aligned} .75 \div 10 &= (7\,\text{décimos} + 5\,\text{centésimos}) \div 10 \\ &= 7\,\text{centésimos} + 5\,\text{milésimos} \\ &= \boldsymbol{\mathit{0\ décimos}} + 7\,\text{centésimos} + 5\,\text{milésimos} = .075 \end{aligned}$$

Aquí fue necesario rellenar una posición superior (la de los décimos) con un cero. ¿Por qué? El cero sirve para posicionar el 7 en la segunda posición y al 5 en la tercera (contando de izquierda a derecha a partir del punto decimal).

[Los alumnos deben resolver la Hoja 3 de los ejercicios]

Tercera clase

3. Multiplicación por potencias de 10. Primera Ley de los Exponentes

Pero no sólo vamos a multiplicar por 10, también queremos multiplicar por 100, por 1000, por 10000, etc. Para ello, observemos que 100 es igual a 10×10, que 1000 es igual a $10 \times 10 \times 10$, y así sucesivamente. Vamos a utilizar una escritura abreviada para tales productos: por ejemplo, el producto 10×10 se abrevia con 10^2 que se lee "10 elevado a la segunda potencia" o diez elevado al cuadrado, donde el "numerito" 2 se llama *exponente*.

$$10^2 = \overbrace{10 \times 10}^{2\text{ veces}} = 100$$

Similarmente, el producto $10 \times 10 \times 10$ se abrevia con 10^3, se lee "10 elevado a la tercera potencia" o diez elevado al cubo, donde el *exponente* ahora es 3:

$$10^3 = \overbrace{10 \times 10 \times 10}^{3\text{ veces}} = 1000$$

Como ves el exponente dice cuántas veces hay que multiplicar el número 10 por sí mismo. Veamos ahora cuál es el efecto de iterar la multiplicación por 10, esto es, ¿cuál es el efecto de multiplicar un número cualquiera por 10 repetidamente? Vamos a mostrarlo con algunos ejemplos.

Ejemplo 3.1. Calcular $10^2 \times 5$. Tenemos que:

$$10^2 \times 5 = \overbrace{10 \times 10}^{2\text{ veces}} \times 5$$

lo cual podemos verlo de la siguiente manera:

$$5 \xrightarrow{\times 10} 50 \xrightarrow{\times 10} 500$$

es decir, la primera vez que multiplico 5 por 10 obtengo 50 y la siguiente vez que multiplico por 10, obtengo 500.

> ***El efecto neto es que al multiplicar por*** $100 = 10^2$ ***el punto decimal se recorre <u>dos</u> lugares hacia la derecha.***

O sea que al multiplicar 5 por $100 = 10^2$, el punto decimal se recorre *dos lugares* hacia la derecha, esto es: $5 \xrightarrow{\times 100} 500$. (¿No lo ves? piensa que 5 es 5.00).

Ejemplo 3.2. Calcular $10^3 \times 0.435$. Tenemos que:

$$10^3 \times 0.435 = \overbrace{10 \times 10 \times 10}^{\text{3 veces}} \times 0.435$$

lo que es lo mismo:

$$0.435 \xrightarrow{\times 10} 4.35 \xrightarrow{\times 10} 43.5 \xrightarrow{\times 10} 435$$

> ***El efecto neto es que al multiplicar por*** $1000 = 10^3$ ***el punto decimal se recorre <u>tres</u> lugares hacia la derecha.***

O sea que al multiplicar 0.435 por $1000 = 10^3$, el punto decimal se recorre *tres lugares* hacia la derecha, esto es: $0.435 \xrightarrow{\times 1000} 435$.

Estos ejemplos nos muestran que cuando multiplicamos por potencias de 10, el exponente nos indica el número de lugares que se recorre el punto decimal a la derecha; así, en el ejemplo 3.1, al multiplicar por $10^2 = 10 \times 10$, el punto decimal se recorre dos lugares a la derecha, como corresponde al exponente 2, y en el ejemplo 3.2, al multiplicar por $10^3 = 10 \times 10 \times 10$, el punto decimal se recorre tres lugares a la derecha de acuerdo al exponente 3. Entonces, para multiplicar cualquier número por alguna potencia de 10 bastará con recorrer el punto decimal a la derecha tantas veces como indique el exponente.

¿Caso especial? Multiplicar $10^3 \times 0.45$ ¿Cómo le hago para recorrer el punto decimal tres lugares a la derecha, si sólo hay dos lugares? ¡Buzo! Observa que $0.45 = 0.450$ y ...

Vamos ahora a multiplicar entre sí, potencias de 10. Por ejemplo:

$$10^2 \times 10^3 = \overbrace{(10 \times 10)}^{\text{2 veces}} \times \overbrace{(10 \times 10 \times 10)}^{\text{3 veces}} = \overbrace{(10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10)}^{\text{5=2+3 veces}} = 10^5$$

O sea:

$$10^2 \times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$$

> ***Al multiplicar potencias (en este caso de 10) los exponentes se suman.***

Otro ejemplo:

$$10^3 \times 10^4 = \overbrace{(10 \times 10 \times 10)}^{\text{3 veces}} \times \overbrace{(10 \times 10 \times 10 \times 10)}^{\text{4 veces}} = \overbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}^{\text{7=3+4 veces}} = 10^7$$

o sea:

$$10^3 \times 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$$

De nuevo, vemos que al multiplicar potencias (de diez) los exponentes se suman. En general:

$$\mathbf{10^m \times 10^n = 10^{m+n}}$$

Esta será para nosotros la Primera Ley de los Exponentes.

¡OJO! Hay curiosidades en el asunto de los exponentes:

PRIMERA CURIOSIDAD:

¿Cuánto vale 10^1?

¡No podemos hablar de que aparezca 10 como factor 1 vez! Vamos a descubrir que 10^1 tiene que ser igual a 10 para ir de acuerdo a la Primera Ley de los Exponentes.

Multipliquemos $10^2 \times 10^1$:

$$10^2 \times 10^1 = \overbrace{10^{2+1}}^{\text{1a. Ley}} = 10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 10^2 \times 10$$

luego:

$$10^2 \times 10^1 = 10^2 \times 10$$

También:

$$10^3 \times 10^1 = \overbrace{10^{3+1}}^{\text{1a. Ley}} = 10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^3 \times 10$$

luego:

$$10^3 \times 10^1 = 10^3 \times 10$$

Similarmente se obtiene que:

$$10^4 \times 10^1 = 10^4 \times 10$$

lo que sugiere inequívocamente que:

$$10^1 = 10$$

Esto es, para que siga siendo válida la Primera Ley de los Exponentes, hay que aceptar que:

10 elevado a la primera potencia tiene que ser igual a 10.

Segunda curiosidad:

¿Cuánto vale 10^0?

¡¡No tiene sentido hablar de que aparezca 10 como factor 0 veces!! Como queremos que valga la Primera Ley de los Exponentes, vamos a ver que es necesario que $10^0 = 1$.

Para ello, multipliquemos $10^2 \times 10^0$:

$$10^2 \times 10^0 = \overbrace{10^{2+0}}^{\text{1a. Ley}} = 10^2$$

Luego:

$$100 \times 10^0 = 100 \quad \text{por lo que} \quad 10^0 = 1$$

Esto es, la Primera Ley de los Exponentes sugiere que:

10 elevado a la cero potencia debe ser igual a 1.

4. División por potencias de 10.

Ahora queremos dividir no sólo por 10, sino también por 100, por 1000, por 10000, etcétera. Para ello recordemos que dividir entre 100 partes iguales a la súper torta es lo mismo que tomar la décima parte de un décimo de súper torta. Esto también se aplica a cualquier cantidad.

En general, podemos decir que dividir entre 100 cualquier cantidad es lo mismo que iterar la división entre 10 dos veces (un centésimo es igual a la décima parte de un décimo) y que dividir entre 1000 es lo mismo que iterar la división entre 10, tres veces. Un milésimo, como se vio, es la décima parte de un centésimo, pero este último es la décima parte de un décimo; así pues, un milésimo es la décima parte de la décima parte de un décimo, o sea que para obtener un milésimo se itera la división entre 10, tres veces.

Recordemos también que dividir entre 10 es lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{10}$. Así que dividir entre 100, que ya vimos que equivale a dividir iteradamente entre 10 dos veces, va a resultar lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{10}$ repetidamente (2 veces). Y dividir entre 1000, que corresponde a dividir iteradamente entre 10 tres veces, va a resultar lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{10}$ repetidamente (3 veces).

En particular:

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$$

$$\text{y} \qquad \frac{1}{1000} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$$

Veamos ahora cuál es el efecto de dividir por 100, por 1000, por 10000, etcétera.

Ejemplo 4.1. Calcular $500 \div 100$ $(500 \div 10^2)$.

Dividir entre 100 resulta lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{10}$ repetidamente (2 veces):

$$500 \div 100 = \left(500 \times \frac{1}{10}\right) \times \frac{1}{10}$$

o bien:

$$500 \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} 50 \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} 5$$

Esto es, la primera vez que dividimos 500 entre 10 obtenemos 50 (poniendo el punto decimal después del segundo cero, partimos de que $500 = 500.$ y recorremos un lugar a la izquierda el punto decimal, obteniendo 50.0); y la siguiente vez que dividimos entre 10, obtenemos 5 (partiendo de 50.0 se llega a 5.00).

Veamos dichas iteraciones de la siguiente manera:

$$500 \div 100 \quad \text{es lo mismo que:} \quad 500. \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} 50.0 \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} 5.00 = 5$$

Tenemos entonces que $500 \div 100 = 5$. Retomemos ahora lo siguiente:

$$\begin{aligned}
500 \div 100 &= \left(500 \times \frac{1}{10}\right) \times \frac{1}{10} \\
&= (500 \times \frac{1}{10}) \times \frac{1}{10} \\
&= 500 \times (\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}) \\
&= 500 \times \frac{1}{100}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$500 \div 100 = 500 \times \frac{1}{100} = 5$$

> ***Podemos ver que el efecto neto al dividir entre $\mathbf{100 = 10^2}$, es que el punto decimal se recorre <u>dos</u> lugares hacia la izquierda, lo cual está indicado por el exponente <u>2</u>.***

Ejemplo 4.2. Calcular $435 \div 1000$ $(435 \div 10^3)$.

Dividir entre 1000 equivale a multiplicar por $\frac{1}{10}$ tres veces:

$$435 \div 1000 = \left[\left(435 \times \frac{1}{10}\right) \times \frac{1}{10}\right] \times \frac{1}{10}$$

lo que es lo mismo que:

$$435 \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} 43.5 \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} 4.35 \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} .435$$

Puesto que estamos dividiendo entre $10^3 = 1000$, el exponente de nuevo nos dice cuántos lugares hacia la izquierda hay que recorrer el punto decimal.

Podemos ver que el efecto neto al dividir entre $\mathbf{1000 = 10^3}$***, es que el punto decimal se recorre <u>tres</u> lugares hacia la izquierda, lo cual está indicado por el exponente <u>3</u>.***

Estos ejemplos nos muestran que cuando dividimos por potencias de 10, el exponente nos indica el número de lugares que se recorre el punto decimal a la izquierda. Así, en el ejemplo 1, al dividir 500 entre 100, o sea, $500 \div 10^2$, el punto decimal se recorre dos lugares a la izquierda de acuerdo al exponente 2; y en el ejemplo 2, al dividir 435 entre 1000, $435 \div 10^3$, el punto decimal se recorre tres lugares a la izquierda de acuerdo al exponente 3.

Entonces, para dividir cualquier número por alguna potencia de 10, bastará con recorrer el punto decimal a la izquierda tantas veces como indique el exponente.

5. La Primera y Segunda Ley de los Exponentes.

Hemos visto que:

$$10^2 \times 10^3 = \overbrace{(10 \times 10)}^{2\,\text{veces}}\overbrace{(10 \times 10 \times 10)}^{3\,\text{veces}} = \overbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}^{5=2+3\,\text{veces}} = 10^5$$

O bien:

$$10^3 \times 10^4 = \overbrace{(10 \times 10 \times 10)}^{3\,\text{veces}}\overbrace{(10 \times 10 \times 10 \times 10)}^{4\,\text{veces}} = \overbrace{(10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10)}^{7=3+4\,\text{veces}} = 10^7$$

Lo cual se puede resumir en lo que hemos llamado *la Primera Ley de los Exponentes* que nos dice:

Primera Ley de los Exponentes:

Al multiplicar entre sí potencias de 10, los exponentes se suman:

$$\mathbf{10^m \times 10^n = 10^{m+n}}$$

Vamos ahora a ver la ***Segunda Ley de los Exponentes*** que tiene que ver con dividir entre sí potencias de 10. En el apartado anterior, vimos divisiones entre potencias de 10, multiplicando por $\frac{1}{10}$ iterativamente. Ahora lo vamos a hacer de otra manera. Recordemos el modelo de la *división exacta*, por ejemplo, en la división $8 \div 2$ o $\frac{8}{2}$ (léase "8 entre 2"), el 8 es el dividendo y el 2 es el divisor, el resultado que es llamado cociente es el número que multiplicado por el divisor (a saber 2) nos debe dar el dividendo (8); luego, el cociente multiplicado por 2 nos debe dar 8, por lo que el cociente es 4. En la división $D \div d$ (léase "D entre d"), se especifican el dividendo D y el divisor d y se trata de hallar el cociente c de modo que se cumpla $c \times d = D$ ("cociente por divisor igual al Dividendo"), en tal caso escribimos $D \div d = c$. En la figura 5 se ilustran los elementos de la división en la "casita" y se ejemplifican con una división particular, a saber, la división $8 \div 2$, cuya solución consiste en encontrar un número que multiplicado por 2 dé como resultado 8, a saber, $c = 4$.

El cociente debe ser tal que al multiplicarlo por el divisor nos dé el dividendo.

Identificando al dividendo como el *numerador* y al divisor como el *denominador*, esto es, a la división $a \div b$ como $\frac{a}{b}$, tenemos que:

El cociente debe ser tal que al multiplicarlo por el denominador nos dé el numerador.

Así, $\frac{a}{b} = c$, significa que $b \times c = a$ (léase “denominador por cociente igual a numerador”). Aunque probablemente pienses en la regla: *lo que está dividiendo en un miembro pasa multiplicando en el otro.*

Ejemplo: $8 \div 2 = \frac{8}{2} = ?$

$$\begin{array}{r|l} & \text{cociente (c)} \\ \cline{2-2} \text{divisor (d)} & \text{Dividendo (D)} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} & ? \\ \cline{2-2} 2 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{entonces:} \\ ? \times 2 = 8 \end{array}$$

Fig. 5: Elementos de la división exacta

En el ejemplo, el dividendo es 8, o sea $D = 8$, el divisor es 2, es decir $d = 2$ y el cociente c es el número buscado. En este caso la solución es muy fácil, el número buscado es 4, porque $4 \times 2 = 8$.

Veamos otro ejemplo sin usar “la casita”, dividir $45 \div 5 = \frac{45}{5}$, el planteamiento en este caso será:

¿Por cuánto hay que multiplicar el divisor (denominador), a saber 5, para obtener el dividendo (numerador), a saber 45?

La respuesta es 9, porque $9 \times 5 = 45$. Esto es $\frac{45}{5} = 9$. En símbolos, hallar el cociente c de dividir $D \div d$ significa determinar el número c, el cual multiplicado por el divisor d nos dé el dividendo D.

En otras palabras, c es la solución de la ecuación: $d \cdot x = D$ (¿por cuál número x debo multiplicar el divisor para obtener el Dividendo?). En el ejemplo anterior la ecuación sería:

$$5x = 45$$

por lo que la solución para x es 9 pues $5 \cdot 9 = 45$, que equivale a decir $\frac{45}{5} = 9$.

Si alguien nos dice que $\frac{900}{15} = 60$ ¡Compruébalo! Multiplicamos 15×60 a ver si nos da 900:

El denominador, a saber 15, por el cociente, que es 60, nos debe dar el numerador, a saber 900.

Para hacer mentalmente la operación 15×60 podemos hacer lo siguiente:

$$15 \times 60 = (10 + 5) \times 60 = 10 \times 60 + 5 \times 60 = 600 + 300\,(5 \times 60 \text{ es la mitad de } 10 \times 60)$$

Moraleja: Para multiplicar por 5, primero multiplico por 10, y el resultado lo divido entre 2.

En los siguientes ejemplos, vamos ahora a dividir entre potencias de 10 usando el concepto de división exacta.

Ejemplo 5.1. Calcular $\dfrac{10^5}{10^3}$.

De acuerdo a la Primera Ley de los Exponentes, $10^5 = 10^3 \times 10^2$, entonces:

$$\frac{10^5}{10^3} = \frac{10^3 \times 10^2}{10^3}$$

La pregunta que debemos contestarnos es: ¿por cuál número debo multiplicar 10^3 (divisor) para que dé 10^5 (Dividendo)? Claramente por 10^2, que resulta ser el cociente.

Note que la igualdad $\frac{10^3 \times 10^2}{10^3} = 10^2$ también se obtiene cancelando 10^3 en el *numerador* (Dividendo) y en el *denominador* (divisor). Esto es:

$$\frac{10^5}{10^3} = \frac{\cancel{10^3} \times 10^2}{\cancel{10^3}} = 10^2$$

Obsérvese que para la división, los exponentes se restan. Esto es: $\dfrac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2$

Ejemplo 5.2. Calcular $\dfrac{10^8}{10^2}$.

Igual que en el ejemplo anterior, utilizamos la Primera Ley de los Exponentes en el numerador:

$$\frac{10^8}{10^2} = \frac{10^6 \times 10^2}{10^2} = \frac{10^6 \times \cancel{10^2}}{\cancel{10^2}} = 10^6$$

Claramente debo multiplicar 10^2 (divisor) por 10^6 (cociente) para que me dé $10^6 \times 10^2$ (Dividendo), que como se ve, equivale a cancelar 10^2 en numerador y denominador. Observemos una vez más que al dividir, los exponentes se restan, esto es:

$$\frac{10^8}{10^2} = 10^{8-2} = 10^6$$

¿Qué hemos aprendido? En estos ejemplos vemos que al dividir potencias de 10, se restan los exponentes. Ya sabíamos de la Primera Ley de los Exponentes que, al multiplicar potencias, los exponentes se suman. Enunciemos ahora lo siguiente:

Segunda Ley de los Exponentes:

Al dividir entre sí potencias de 10, los exponentes se restan:

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

<u>**[Los alumnos deben resolver la Hoja 4 de los ejercicios.]**</u>

Cuarta clase

6. Potencias de 10 con exponentes negativos.

Sabiendo que cuando se dividen potencias de 10 los exponentes se restan, vamos a interpretar las potencias negativas. ¿Qué significa, por ejemplo, 10^{-3}?

Consideremos primero lo siguiente:

a) $10^{-3} = 10^{0-3}$ ya que $-3 = 0 - 3$

b) $\dfrac{10^0}{10^3} = 10^{0-3}$ por la Segunda Ley de los Exponentes

c) $\dfrac{10^0}{10^3} = \dfrac{1}{10^3}$ porque, como ya vimos, $10^0 = 1$

El significado de 10^{-3} nos lo da la Segunda Ley de los Exponentes (al dividir potencias de 10 los exponentes se restan). En efecto:

$$\frac{1}{10^3} \overset{c)}{=} \overbrace{\frac{10^0}{10^3} = 10^{0-3}}^{\text{2a. Ley de Exp}} \overset{a)}{=} 10^{-3}$$

Tenemos entonces que:

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$$

lo que implica que 10^{-3} es algo que multiplicado por 10^3 nos da 1:

$$10^{-3} \cdot 10^3 = 1$$

lo cual define a 10^{-3} como el *recíproco* de 10^3, (y viceversa, 10^3 es el *recíproco* de 10^{-3}). Ahora bien, como $10^3 = 1000$, entonces $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$, lo cual se lee como *un milésimo*, cuya representación decimal es 0.001; tenemos entonces que:

$$10^{-3} = 0.001 \quad (10^{-3} \text{ es igual a un milésimo})$$

Por otro lado, si dividimos 1 por 10^3 sabemos que el punto decimal se recorre tres lugares a la izquierda, con lo que también llegamos a que: $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0.001$.

Veamos otro ejemplo: ¿Qué significa 10^{-5}? Similarmente:

$$\frac{1}{10^5} \overset{c)}{=} \overbrace{\frac{10^0}{10^5} = 10^{0-5}}^{\text{2a. Ley de Exp}} \overset{a)}{=} 10^{-5}$$

Por otro lado, como $10^5 = 100\,000$, entonces:

$$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000}$$

y sabemos que $\frac{1}{100\,000}$ se lee como “un cienmilésimo”, cuya forma decimal es 0.00001, luego entonces 10^{-5} se puede expresar en la forma decimal: 0.00001

7. Notación científica.

Si queremos escribir de un modo convencional el tamaño de un virus, a saber: 0.000015 mm, o la masa de un electrón:

$$0.000000000000000000000000000000091093822\ kg$$

o el número de Avogadro que expresa el número de moléculas en un mol de cualquier sustancia: 602300000000000000000000 moléculas/mol, va a ser difícil, ya que cuando trabajamos con números que contienen muchos ceros es fácil cometer errores. Existe una manera de escribir estos números para facilitar el trabajo y prevenir errores: ***la notación científica,*** que consiste en abreviar números muy grandes o muy pequeños, utilizando potencias de 10:

> ***Un número está escrito en notación científica si tiene <u>un</u> dígito entero, con o sin decimal, multiplicado por una potencia de 10.***

Veamos algunos ejemplos para ilustrar lo que se quiere decir.

Ejemplo 7.1. Escribir en notación científica el tamaño de un virus, a saber 0.000015mm.

Queremos escribir este número como 1.5 multiplicado por una potencia de 10. Multipliquemos por la unidad el valor del tamaño del virus, pero por la unidad *conveniente*, en este caso:

$$1 = 10^0 = 10^5 \times 10^{-5}$$

Pero ¿por qué elegimos al 5 para la potencia de 10? Porque 10^5 recorre el punto decimal 5 lugares a la derecha, veámoslo:

$$0.000015 = 0.000015 \times 1 = 0.000015 \times \left(10^5 \times 10^{-5}\right) = \left(0.000015 \times 10^5\right) \times 10^{-5} = 1.5 \times 10^{-5}$$

De este modo, al multiplicar el valor del tamaño del virus por la unidad *conveniente*, la cual en este caso es: $1 = 10^5 \times 10^{-5}$, <u>no cambia la cantidad, sólo la presentación</u>:

$$0.000015 = 1.5 \times 10^{-5}$$

Ejemplo 7.2. Escribir en notación científica la masa de un electrón, a saber:

$$0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,91093822\mathrm{kg}$$

Queremos escribir este número como 9.1093822 (o bien, redondeado a centésimos como 9.11) multiplicado por una potencia de 10. Multipliquemos por la unidad *conveniente* el valor de la masa del electrón, en este caso $1 = 10^0 = 10^{31} \times 10^{-31}$. Y nuevamente nos hacemos la pregunta de ¿por qué elegimos al 31 para la potencia de 10?; pues porque 10^{31} recorre el punto decimal 31 lugares a la derecha. En efecto:

$$0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,91093822 \times 10^{31} \times 10^{-31} = 9.1093822 \times 10^{-31}$$

De este modo, al multiplicar la masa del electrón por la unidad conveniente, la cual en este caso es: $1 = 10^{31} \times 10^{-31}$, <u>no cambia la cantidad, sólo la presentación</u>:

$$0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,91093822 = 9.1093822 \times 10^{-31}$$

(o bien, 9.11×10^{-31}).

<u>**[Los alumnos deben resolver la Hoja 5 de los ejercicios]**</u>

Ejercicios: Notación Científica
(HOJA 1)

Nombre:________________________________ Fecha: __________ #Lista:______

Cuestionario

1. ¿Qué es una milésima?

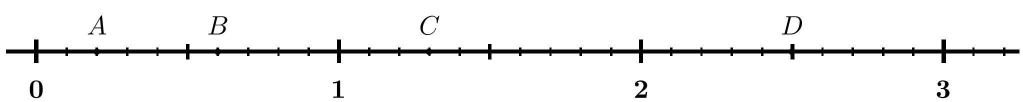
____

2. ¿Cómo se lee 1.235 m?

____

Ejercicios

1. En la siguiente recta el punto B se encuentra en 0.6 (en seis décimos). ¿En qué posición están los puntos A, C y D?



A: ____

B: 0.6 = seis décimos____________________________

C: ____

D: ____

2. Usa la línea de abajo para hacer una recta numérica y ubicar los siguientes números:

a) $P = 0.8$
b) $Q = 1.3$
c) $R =$ tres décimos
d) $S =$ una unidad y cuatro décimos

____

3. Convierte 1 metro y 23 centímetros a centímetros (es decir, ¿a cuántos centímetros equivale 1 metro y 23 centímetros?):

1 metro y 23 centímetros = ____________________________
(completa)

4. 1.234 es un número decimal cuyo significado vas a precisar con la expansión decimal. Tenemos lo siguiente:

Lectura de 1.234: "una unidad, dos décimas, tres centésimas y 4 milésimas"
En realidad: "una unidad ***y*** dos décimas ***y*** tres centésimas ***y*** 4 milésimas"
Significa: "una unidad ***más*** dos décimas ***más*** tres centésimas ***más*** 4 milésimas"
O sea: "una unidad **+** dos décimas **+** tres centésimas **+** 4 milésimas"

Luego, la expansión decimal de 1.234 está dada por:

$$1.234 = 1 + 2 \times \frac{1}{10} + \underline{\hspace{8cm}}$$
(completa)

O sea:

$$1.234 = 1 + \frac{2}{10} + \underline{\hspace{8cm}}$$
(completa)

5. Completa la tabla escribiendo la lectura y expansión decimal correspondientes a los números dados

Número	**Lectura**	**Expansión decimal**
0.31	Cero unidades y tres décimos y un centésimo	$0.31 = 0 \times 1 + 3 \times \frac{1}{10} + \frac{1}{100}$
0.847		
6.25		
920		
12		

Ejercicios: Notación Científica

(HOJA 2)

Nombre:______________________________ Fecha: __________ #Lista:______

6. Multiplica por 10 los siguientes números (a partir de su lectura):

a) **0.321**

- *Lectura:* 0.321 = 3 décimos + 2 centésimos + 1 milésimo
- *Multiplicación por 10:*

$$\begin{array}{rlclcl} & (3 \text{ décimos} & + & 2 \text{ centésimos} & + & 1 \text{ milésimo}) \times 10 \\ = & 3 \text{ unidades} & + & 2 \text{ décimos} & + & 1 \text{ centésimo} \end{array}$$

- *Producto:* 3 unidades + 2 décimos + 1 centésimo = 3.21

b) **0.586**

- *Lectura:* ____________________
- *Multiplicación por 10:*
- *Producto:* ____________________

c) **9.87**

- *Lectura:* ____________________
- *Multiplicación por 10:*
- *Producto:* ____________________

d) **654**

- *Lectura:* ____________________
- *Multiplicación por 10:*
- *Producto:* ____________________

7. Multiplica por 10 los siguientes números (a partir de su expansión decimal).

a) **0.235**

- *Expansión decimal:* $0.235 = 0 \times 1 + 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 5 \times \frac{1}{1000}$
- *Multiplicación por 10:*

$$10 \times \left(0 \times 1 + 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 5 \times \frac{1}{1000}\right) = 0 \times 10 + 2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$$

- *Producto:* $2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100} = 2.35$

b) **0.562**

- *Expansión decimal:* ______________________________
- *Multiplicación por 10:*
- *Producto:* ______________________________

c) **3.28**

- *Expansión decimal:* ______________________________
- *Multiplicación por 10:*
- *Producto:* ______________________________

d) **64**

- *Expansión decimal:* ______________________________
- *Multiplicación por 10:*
- *Producto:* ______________________________

Ejercicios: Notación Científica
(HOJA 3)

Nombre:______________________________ Fecha: __________ #Lista:______

8. Divide entre 10 los siguientes números (a partir de su lectura).

a) **0.321**

- *Lectura:* 0.321 = 3 décimos + 2 centésimos + 1 milésimo
- *División entre 10:*

$$\begin{array}{rllll} & (3\text{ décimos} & + & 2\text{ centésimos} & + & 1\text{ milésimo}) \div 10 \\ = & 3\text{ centésimos} & + & 2\text{ milésimos} & + & 1\text{ diezmilésimos} \end{array}$$

- *Cociente:* 0 décimos + 3 centésimos + 2 milésimos + 1 diezmilésimos = 0.0321

b) **0.586**

- *Lectura:* ____________________
- *División entre 10:*
- *Cociente:* ____________________

c) **9.87**

- *Lectura:* ____________________
- *División entre 10:*
- *Cociente:* ____________________

d) **654**

- *Lectura:* ____________________
- *División entre 10:*
- *Cociente:* ____________________

9. Divide entre 10 los siguientes números (a partir de su expansión decimal).

a) **0.432**

- *Expansión decimal:* $0.432 = 0 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 2 \times \frac{1}{1000}$

- *División entre 10:*

$$\left(0 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 2 \times \frac{1}{1000}\right) \div 10 = \frac{1}{10} \times \left(0 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 2 \times \frac{1}{1000}\right)$$
$$= 0 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{1}{100} + 3 \times \frac{1}{1000} + 2 \times \frac{1}{10000}$$

- *Cociente:* $0 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{1}{100} + 3 \times \frac{1}{1000} + 2 \times \frac{1}{10000} = 0.0432$

b) **0.218**

- *Expansión decimal:* ____________________

- *División entre 10:*

- *Cociente:* ____________________

c) **7.53**

- *Expansión decimal:* ______________________________

- *División entre 10:*

- *Cociente:* ______________________________

d) **530**

- *Expansión decimal:* ______________________________

- *División entre 10:*

- *Cociente:* ______________________________

Ejercicios: Notación Científica
(HOJA 4)

Nombre:______________________ Fecha: __________ #Lista:______

10. Completa la siguiente tabla:

Potencia	**Significa**	**Lectura**
10^2	10×10	Diez elevado a la segunda potencia (diez elevado al cuadrado)
10^4		
	$10 \times 10 \times 10$	
		Diez elevado a la quinta potencia

11. Completa la siguiente tabla (multiplicando por potencias de 10)

Operación	**Lugares que se recorre el punto decimal a la derecha**	**Producto**
48.56×10^3	3	48560
1.46×10^4		
	5	980000
	4	68.3

12. Expresa los siguientes números en potencias de 10

a) $1000000 =$ ______________

b) $100000000 =$ ______________

c) $1000 =$ ______________

d) $1000000000000 =$ ______________

e) $100000 =$ ______________

13. Completa la siguiente tabla (dividiendo por potencias de 10)

Operación	**Lugares que se recorre el punto decimal a la izquierda**	**Cociente**
$456.7 \div 10^3$	3	0.4567
$123.46 \div 10^2$		
	5	0.000089
	4	29.1

14. Realiza las siguientes operaciones usando potencias de 10.

a) $10000 \times 100 =$ ________________

b) $1000 \times 1000000 =$ ________________

c) $10000000000 \times 100000 =$ ________________

15. Resuelve los siguientes ejercicios usando el concepto de división exacta.

a) $\dfrac{10^7}{10^3} =$ ________________

b) $\dfrac{10^5}{10^2} =$ ________________

c) $\dfrac{10^{10}}{10^6} =$ ________________

d) $\frac{10^4}{10} =$ ________________

16. Resuelve los siguientes ejercicios usando leyes de exponentes.

a) $\dfrac{10^9}{10^6} =$ ________________

b) $10^5 \times 10^2 =$ ________________

c) $\dfrac{10^{11}}{10^5} =$ ________________

d) $10^4 \times 10^3 =$ ________________

Ejercicios: Notación Científica

(HOJA 5)

Nombre:______________________________________ Fecha: ___________ #Lista:______

17. Escribe utilizando exponentes negativos:

a) $\frac{1}{10^7} =$ ________________

b) $\frac{10}{10^2} =$ ________________

c) $\frac{1}{10^4} =$ ________________

d) $\frac{10^6}{10^9} =$ ________________

18. Escribe los siguientes números como potencias de 10:

a) $0.000001 =$ ________________

b) $10000 =$ ________________

c) $100 =$ ________________

d) $0.00001 =$ ________________

19. Escribe los siguientes números en notación científica:

a) $0.0000012 =$ ______________________

b) $1230000 =$ ______________________

c) $0.0031 =$ ______________________

d) $900 =$ ______________________

e) $0.000031416 =$ ________________

20. La población del mundo se estima en 6800000000 personas. ¿Cómo se expresa correctamente este número en notación científica? Subraya la mejor opción

a) 7×10^9 **b)** 0.68×10^{10} **c)** 6.8×10^9 **d)** 68×10^8